

# **Globale Effekte einer Erdmagnetfeldumkehrung: Magnetosphärenstruktur und kosmische Teilchen**

Von der Gemeinsamen Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina  
zu Braunschweig  
zur Erlangung des Grades einer  
Doktorin der Naturwissenschaften  
(Dr.rer.nat.)  
genehmigte  
D i s s e r t a t i o n

von Anja Stadelmann  
aus Braunschweig

## **Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie.

Detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Referent: Prof. Dr. K.-H. Glaßmeier

2. Referent: Prof. Dr. J. Vogt

eingereicht am: 13. Mai 2004

mündliche Prüfung (Disputation) am: 22. November 2004

Copyright © Copernicus GmbH 2005

ISBN 3-936586-42-X

Copernicus GmbH, Katlenburg-Lindau

Druck: Schaltungsdienst Lange, Berlin

Printed in Germany

## Veröffentlichungen von Teilen der Arbeit

Teilergebnisse aus dieser Arbeit wurden mit Genehmigung der Gemeinsamen Naturwissenschaftlichen Fakultät, vertreten durch den Mentor der Arbeit, in folgenden Beiträgen vorab veröffentlicht:

Tagungsbeiträge:

- A. Stadelmann, K.-H. Glaßmeier, M.B. Kallenrode, M. Sinnhuber, J. Vogt, G. A. Glatzmaier: *Particle impacts on the Earth during magnetic field reversals*, (Vortrag) EGU 1. General Assembly, Nice (2004)
- A. Stadelmann, K.-H. Glaßmeier, J. Vogt, M.B. Kallenrode, M. Sinnhuber, G. A. Glatzmaier *Auswirkungen einer Magnetfeldumkehr auf kosmische Teilchen und atmosphärische Prozesse*, (Vortrag) 64. Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, Berlin (2004)
- A. Stadelmann: *Energetic particle motions in the paleomagnetosphere*, (Vortrag) Kolloquium des DFG Schwerpunktprogramms 1097, Potsdam (2003)
- A. Stadelmann, J. Vogt, K.-H. Glaßmeier, M.-B. Kallenrode: *Concerning system Earth during geomagnetic polarity transitions: Magnetospheric magnetic field and energetic particle flux modulations*, (Vortrag) EGS - AGU - EUG Joint Assembly, Nice (2003)
- M. von Koenig, J. Burrows, K.-H. Glassmeier, M.-B. Kallenrode, K. Künzi, A. Stadelmann, J. Vogt, B. Zieger: *The system Earth during geomagnetic polarity transitions: An interdisciplinary co-operation to investigate impacts on geomagnetic field configurations, energetic particle trajectories, and the composition of the neutral atmosphere*, (Poster) EGS - AGU - EUG Joint Assembly, Nice (2003)
- A. Neuhaus: *A Parametric Model of the Paleomagnetosphere*, (Vortrag) Kolloquium des DFG Schwerpunktprogramms 1097, München (2002)
- A. Neuhaus, J. Vogt, K.-H. Glassmeier: *A Parametric Model of the Paleomagnetosphere*, (Poster) AGU Fall meeting, San Francisco (2001)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2. Das Magnetfeld der Erde</b>	<b>9</b>
2.1. Multipolentwicklung . . . . .	11
2.2. Energie des Magnetfeldes . . . . .	15
2.3. Säkularvariationen . . . . .	18
2.3.1. Zeitliche Entwicklung in den letzten hundert Jahren . . . . .	18
2.3.2. Magnetfelder für extrapolierte Gaußwerte . . . . .	21
2.4. Paläomagnetismus . . . . .	24
2.5. Magnetosphärische Stromsysteme und Magnetfelder . . . . .	26
2.6. Magnetosphärenmodelle . . . . .	29
2.6.1. Magnetohydrodynamische Modelle . . . . .	29
2.6.2. Empirisches Magnetosphärenmodell . . . . .	30
2.6.3. Potentialtheoretische Modell . . . . .	31
2.6.3.1. Sphärisches Magnetosphärenmodell nach Willis . . . . .	32
2.6.3.2. Zylindrisches Magnetosphärenmodell nach Voigt . . . . .	35
<b>3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells</b>	<b>37</b>
3.1. Koordinatensystem und Geometrie der Modellmagnetosphäre . . . . .	37
3.2. Modellannahmen und Modellierungsstrategie . . . . .	38
3.3. Inneres Magnetfeld der Erde . . . . .	41
3.4. Magnetfeld in der Halbkugel . . . . .	43
3.5. Magnetfeld im Zylinder . . . . .	48
3.6. Hinzunahme der Schweifströme . . . . .	53
3.7. Beitrag des interplanetaren Magnetfeldes . . . . .	56
3.8. Iterativer Prozeß zur Koeffizientenbestimmung . . . . .	60
3.9. Berechnung des Schweifstromes . . . . .	61
3.10. Erweiterungsansatz für höhere Multipole . . . . .	63
3.11. Vergleich mit MHD-Simulationen . . . . .	64
<b>4. Magnetfelder und Feldlinien</b>	<b>67</b>
4.1. Berechnung und Darstellung der Magnetfeldlinien . . . . .	67
4.2. Bestimmung der geometrischen Magnetosphärenparameter . . . . .	68

4.3.	Skalierung der magnetosphärischen Magnetfelder . . . . .	71
4.4.	Mögliche Paläomagnetfelder . . . . .	75
4.4.1.	Zonaler Dipol . . . . .	75
4.4.2.	Pole-on-Dipol . . . . .	77
4.4.3.	Zonaler Quadrupol . . . . .	79
4.4.4.	Dipol-Quadrupol-Konfiguration . . . . .	81
4.4.5.	Simulierte Feldumkehrung . . . . .	84
4.5.	Vergleich der Magnetosphärenmodelle . . . . .	86
<b>5.</b>	<b>Hochenergetische Teilchen in der Magnetosphäre</b>	<b>91</b>
5.1.	Berechnung der Teilchentrajektorien . . . . .	91
5.1.1.	Bestimmung der Trajektorien mittels Leapfrog-Verfahren . . .	91
5.1.2.	Wahl des Zeitschrittes . . . . .	94
5.2.	Ähnlichkeit und Skalierbarkeit von Teilchentrajektorien . . . . .	96
5.3.	Kosmische Teilchen . . . . .	97
5.4.	Anfangsbedingungen für Teilchenbahnen . . . . .	100
5.5.	Bestimmung von Teilcheneinfällen in die Atmosphäre . . . . .	102
5.6.	Teilchen in möglichen Paläomagnetosphären . . . . .	104
5.6.1.	Zonaler Dipol . . . . .	104
5.6.2.	Pole-on-Dipol . . . . .	107
5.6.3.	Zonaler Quadrupol . . . . .	109
5.6.4.	Dipol-Quadrupol-Konfiguration . . . . .	111
5.6.5.	Simulierte Feldumkehrung . . . . .	113
5.7.	Einfluß des Magnetosphärenmodells auf die Teilcheneinfälle . . . . .	116
5.8.	Auswirkungen des Teilcheneinfalls auf die Atmosphäre . . . . .	118
<b>6.</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>121</b>
<b>A.</b>	<b>Mathematische Hilfsmittel</b>	<b>125</b>
A.1.	Koordinatensysteme und -transformationen . . . . .	125
A.2.	Kugelfunktionen . . . . .	127
A.2.1.	Eigenschaften der Kugelfunktionen . . . . .	127
A.2.2.	Erzeugende Funktion und einige Ableitungen . . . . .	129
A.2.3.	Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen . . . . .	130
A.3.	Besselfunktionen . . . . .	131
A.3.1.	Eigenschaften der Besselfunktionen . . . . .	132
A.3.2.	Fourier-Bessel-Reihenentwicklung . . . . .	132
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>133</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Auswirkungen einer Magnetfeldumkehrung auf die Erde . . . . .	5
2.1. Energiespektrum des heutigen Erdmagnetfeldes . . . . .	18
2.2. Magnetfeldbetrag auf der Erdoberfläche 1900 und 2000 . . . . .	19
2.3. Gaußkoeffizienten bis zum 3. Grad (1900 bis 2000) . . . . .	20
2.4. Magnetfeldbetrag auf der Erdoberfläche (Extrapolation) . . . . .	22
2.5. Magnetischen Energie (Extrapolation) . . . . .	23
2.6. Magnetische Energie (simulierten Feldumkehrung) . . . . .	26
2.7. Stromsysteme in der Magnetosphäre . . . . .	27
2.8. Magnetosphärengometrie nach Willis . . . . .	33
3.1. Magnetosphärengometrie nach Voigt . . . . .	38
3.2. Einfluß des Streckparameters $\lambda$ . . . . .	55
3.3. Einfluß der Magnetopausendurchlässigkeitsparameter $c_i, c_a$ . . . . .	59
3.4. Teilgebiete und Ränder der Modellmagnetosphäre . . . . .	60
3.5. Schweifstrom eines zonalen Dipols . . . . .	63
3.6. Vergleich mit MHD-Simulationen: Magnetfeldlinien . . . . .	64
3.7. Vergleich mit MHD-Simulationen: Schweifstrom . . . . .	65
4.1. Abstand der Magnetopause zur Erde . . . . .	70
4.2. Geometrische Beziehungen in der Halbkugel . . . . .	70
4.3. Skalierte Magnetfeldlinien für ein zonales Dipolfeld . . . . .	73
4.4. Feldlinien eines zonalen Dipols . . . . .	76
4.5. Feldlinien eines Pole-on-Dipols . . . . .	78
4.6. Feldlinien eines zonalen Quadrupols . . . . .	80
4.7. Feldlinien einer Dipol-Quadrupolkombination . . . . .	82
4.8. Gaußkoeffizienten bis zum 2. Grad (simulierten Feldumkehrung) . . . . .	84
4.9. Magnetfeldbetrag auf der Erdoberfläche (sim. Feldumkehrung) . . . . .	85
4.10. Magnetopausengröße (simulierte Feldumkehr) . . . . .	86
4.11. Vergleich der Magnetosphärenmodelle: Geometrie . . . . .	87
4.12. Vergleich der Magnetosphärenmodelle: Feldlinien . . . . .	88
4.13. Vergleich der Magnetosphärenmodelle: Feldabweichungen . . . . .	89
5.1. Teilchenbahnen in der Magnetosphäre . . . . .	93

5.2. Energiespektrum kosmischer Protonen . . . . .	99
5.3. Gyrationenradien hochenergetischer kosmischer Teilchen . . . . .	100
5.4. Anfangsorte und -geschwindigkeiten der Teilchenbahnen . . . . .	101
5.5. Definition der Cutoffbreite und Impaktgebiete . . . . .	102
5.6. Teilcheneinfall für einen zonalen Dipol . . . . .	105
5.7. Teilcheneinfall für einen Pole-on-Dipol . . . . .	108
5.8. Teilcheneinfall für einen zonalen Quadrupol . . . . .	110
5.9. Teilcheneinfall für eine Dipol-Quadrupol-Konfiguration . . . . .	112
5.10. Magnetfeld und Einfallgebiete (simulierten Feldumkehrung) . . . . .	114
5.11. Teilcheneinfall (simulierten Feldumkehrung) . . . . .	115
5.12. Vergleich der Magnetosphärenmodelle: Cutoffbreiten . . . . .	117
5.13. Auswirkungen der kosmischen Strahlung auf das Klima . . . . .	118
A.1. Koordinatensysteme . . . . .	125

# 1. Einleitung

Es ist schon lange bekannt, daß das Magnetfeld der Erde ständigen Schwankungen ausgesetzt ist. Dabei kommt es in unregelmäßigen Abständen zu Umpolungen des Erdmagnetfeldes (Clement, 2004). Welche Folgen kann eine Umkehrung des Magnetfeldes haben? Das DFG-Schwerpunktprogramm „Erdmagnetische Variationen: Raumzeitliche Struktur, Prozesse und Wirkungen auf das System Erde“ hat sich unter anderem zum Ziel gesetzt, die räumliche und zeitliche Struktur des Magnetfeldes während einer Feldumkehrung und die möglichen Auswirkungen auf das System Erde zu untersuchen. In Abbildung 1.1 ist schematisch dargestellt, wie sich die Polumkehrung auf die Erde auswirken kann.



**Abbildung 1.1.:** Auswirkungen einer Magnetfeldumkehrung auf das System Erde.

In den letzten Jahrzehnten wurde diskutiert, welche Magnetfeldkonfigurationen während einer Umkehrung möglich oder wahrscheinlich sind. Anhaltspunkte hierfür liefern numerische Simulationen (z. B. Glatzmaier und Roberts, 1995) und Auswertungen paläomagnetischer Messungen (z. B. Merrill und McFadden, 1999; Leonhardt et al., 2003). Zu „normalen“ Zeiten wird das Erdmagnetfeld in einfachster Näherung durch einen zonalen Dipol beschrieben. Während einer Feldumkehrung nimmt der Betrag dieses Dipolfeldes drastisch ab. Andere Dipolkonfigurationen, wie der Poleon-Dipol, oder höhere Multipole können eine wichtige Rolle spielen.

Wie sieht für solche Konfigurationen das Magnetfeld innerhalb der Magnetosphäre aus? Das innere Erdmagnetfeld bestimmt das Magnetfeld im Außenraum der Erde, weil durch seine Wechselwirkung mit dem Sonnenwind die Magnetosphäre gebildet wird. Somit legt das innere Erdmagnetfeld die Struktur und Größe der Magnetosphäre fest. Verschiedene Verfahren zur Modellierung der Magnetosphäre sind in den letzten Jahrzehnten entwickelt worden (siehe z. B. Jordan, 1994; Siscoe, 2001). Eine Möglichkeit bieten MHD-Simulationen, die eine detaillierte Beschreibung der Magnetosphäre liefern. Andere Wege führen über quantitative Modelle, zu denen die empirischen und die Potentialfeldmodelle gehören. Vorteil dieser Modelle ist, daß sie schnell zu berechnen sind, und das Magnetfeld an jedem beliebigen Ort exakt bestimmt werden kann. Somit können diese Modelle z. B. zur Berechnung von Teilchenbahnen in der Magnetosphäre herangezogen werden.

Die Bahnen geladener Teilchen werden durch Magnetfelder beeinflusst. Unterscheidet sich das Erdmagnetfeld z. B. während einer Polumkehrung signifikant von der heutigen Situation, so wird sich auch das magnetosphärische Magnetfeld ändern. Teilchen kosmogenen oder solaren Ursprungs werden demnach andere Bahnen innerhalb der Magnetosphäre zurücklegen und nicht wie im heutigen Fall vorwiegend in den polaren Regionen auf die Erde treffen. Es stellt sich also die Frage, in welche Gebiete Teilchen eindringen können und wie sich der Teilchenfluß vom heutigen Fluß unterscheidet. Die Teilchenflüsse in die Atmosphäre wiederum haben Auswirkungen auf atmosphärische Prozesse, wie z. B. die Ionisation der neutralen Atmosphäre (Crutzen et al., 1975; Quack et al., 2001) oder den Ozonabbau (Sinnhuber et al., 2003). Welche möglichen Folgen treten damit für das globale Klima der Erde auf?

Ziel dieser Arbeit ist es, Antworten auf die Fragen zu finden, wie das Magnetfeld während einer Feldumkehrung innerhalb der Magnetosphäre aussieht und wie sich geladene, hochenergetische Teilchen in solchen Magnetosphären verhalten bzw. welcher Teilcheneinfall auf der Erde zu erwarten ist. Dies entspricht den mittleren beiden Punkten in Abbildung 1.1.

Eine Beschreibung des heutigen Magnetfeldes wird in Kapitel 2 gegeben. Das Innenfeld der Erde läßt sich als Multipolentwicklung darstellen, wobei die Entwicklungskoeffizienten keineswegs konstant sind, sondern zeitlichen Schwankungen unterliegen. Dies führt unter anderem zu paläomagnetischen Feldern, wobei insbesondere auf die Magnetfeldumkehrungen eingegangen wird und mögliche Szenarien für Umkehrungen vorgestellt werden. Weiterhin wird das äußere Magnetfeld der Erde und die Magnetosphäre mit ihren verschiedenen Stromsystemen kurz beschrieben. In den letzten Jahrzehnten sind unterschiedliche Magnetosphärenmodelle entwickelt worden. Einige der bekannteren werden hier unter dem Gesichtspunkt betrachtet, inwiefern sie sich zur Modellierung von beliebigen Magnetfeldkonfigurationen verwenden lassen. Besonders geeignet erscheinen hier die Potentialfeldmodelle von Willis et al. (2000) und Voigt (1981).

Das Modell von Voigt (1981) legt eine realistische Magnetosphärengeometrie zu Grunde und bietet mit seinen vielen Parameter die Möglichkeit, auch magnetosphärische

Magnetfelder während einer Feldumkehrung zu betrachten. In Kapitel 3 wird dieses Modell ausführlich hergeleitet und erweitert.

Kapitel 4 zeigt eine Parameterstudie als Anwendungen dieses Magnetfeldmodells. Betrachtet werden verschiedene, mögliche Magnetfeldkonfigurationen während einer Magnetfeldumkehrung. Darstellungen von Magnetfeldlinien und Magnetfeldern an der Erdoberfläche geben Hinweise auf die Fragen, wie die Magnetfeldverteilung an der Erdoberfläche aussehen könnte, wo die magnetischen Pole lokalisiert sind, ob und wo es offene und geschlossene Magnetfeldlinien gibt.

In Kapitel 5 wird das Magnetosphärenmodell als Werkzeug benutzt, um die Bewegung hochenergetischer Teilchen in der Magnetosphäre zu bestimmen. Es wird untersucht, wie sich kosmische Teilchen in den unterschiedlichen Magnetfeldkonfigurationen während einer Feldumkehrung verhalten. Welche Teilchen gelangen zur Erde, welche Teilchen werden in der Magnetosphäre ablenkt und verlassen den Einflußbereich der Erde wieder? Verknüpft damit ist auch die Frage nach dem Teilchenfluß in die Atmosphäre. In welche Gebiete können Teilchen eindringen, wie groß ist der Teilchenfluß? Ein kurzer Ausblick auf die Auswirkungen einer Magnetfeldumkehrung bzgl. atmosphärischer Prozesse und des globalen Erdklimas sowie die Zusammenfassung schließen die Arbeit ab.



## 2. Das Magnetfeld der Erde

Vermutlich wußte schon Thales von Milet im 5. Jahrhundert vor Christus um den Magnetismus von Gestein. Die Chinesen benutzten bereits vor 2000 Jahren den Kompaß als Navigationsinstrument. Aber erst im 16. Jahrhundert führte William Gilbert die ersten dokumentierten Untersuchungen zum Erdmagnetfeld durch und stellte sie in seinem Buch „De Magnete“ vor. An Hand seiner Terrella, eines Magneteisensteins in Kugelform, konnte er bekannte Phänomene erklären, wie z. B. das Verhalten einer Kompaßnadel an verschiedenen Punkten der Erde. Ende des 18. Jahrhunderts vermehrte sich das Wissen über den Erdmagnetismus: Viele Beobachtungen sowohl in Observatorien, als auch auf Forschungsreisen wurden durchgeführt. Angeregt durch Alexander von Humboldt wandte sich auch Carl Friedrich Gauß dem Magnetismus zu. Während wir Humboldt viele Magnetfeldmessungen rund um den Erdball verdanken, geht auf Gauß die Bestimmung der Intensität des Erdmagnetfeldes zurück. Zuvor wurden nur die Inklination und Deklination des Feldes bestimmt. Gauß (1839) entwickelte eine mathematische Beschreibung des Erdmagnetfeldes mittels der Kugelfunktionsentwicklung, die bis heute verwendet wird. Mehr zur Geschichte der Erforschung des Erdmagnetismus kann man unter anderem bei Kertz (1999) nachlesen.

Das Magnetfeld der Erde wird von hochkomplexen dynamischen Systemen erzeugt, deren Ursprünge sowohl im Erdinneren, als auch außerhalb der Erde zu finden sind. Der äußere Anteil des Magnetfeldes wird durch mehrere Stromsysteme in der Magnetosphäre hervorgerufen. Für das innere Magnetfeld der Erde sind magnetohydrodynamische Prozesse im flüssigen Erdkern verantwortlich, die an Hand des sogenannten Erddynamos erklärt werden. Da sich die vorliegende Arbeit mit dem magnetosphärischen Magnetfeld beschäftigt, sollen diese Prozesse nicht näher erläutert werden. Eine gute Einführung zum Thema Erddynamo geben unter anderem Merrill et al. (1996).

Das Erdmagnetfeld ist kein statisches und konstantes Gebilde, sondern unterliegt permanenten Variationen. Hierbei wird zwischen den kurzperiodischen Variationen, die sich im Bereich von Minuten und Stunden bis hin zu Tagen und Monaten bewegen, und den langperiodischen Variationen unterschieden, die sich auf geologischen Zeitskalen, also im Bereich von Jahrzehnten und Jahrtausenden abspielen. Die kurzperiodischen Variationen haben ihren Ursprung außerhalb der Erde und sind z. B. auch durch die Aktivität der Sonne geprägt. Die Amplitude solcher Magnetfeldänderungen können Werte bis zu einigen hundert Nanotesla betragen, also Schwankungen im Prozentbereich. Die langperiodischen Variationen hingegen werden durch Prozesse im Erdinneren hervorgerufen. Zu diesen Magnetfeldänderungen gehört auch die sogenannte Feldumkehrung, bei der die Polarität des Magnetfeldes wechselt. Damit sind Änderungen um mehrere Tausend oder gar Zehntausend Nanotesla verbunden.

Die zeitlichen Magnetfeldentwicklungen, die in den einzelnen Kapiteln dieser Arbeit untersucht werden, spielen sich auf geologischen, d. h. sehr langen Zeitskalen ab, so daß man auf dynamische Berechnungen verzichten und stattdessen auf eine Abfolge statischer Zustände zurückgreifen kann. Dieses Vorgehen und die Annahme, daß im Beobachtungsraum außerhalb der Erde keine Ströme fließen, führen dazu, daß sich das innere Magnetfeld der Erde als Multipolfeld darstellen läßt, welches man in sphärischer Geometrie mittels Kugelfunktionsentwicklung ausdrücken kann. Dies wird in Abschnitt 2.1 ausführlich besprochen. Gauß (1839) modellierte als erster das Erdmagnetfeld mit Hilfe dieses Verfahrens. Die hierbei auftretenden Koeffizienten werden ihm zu Ehren als Gaußkoeffizienten bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen den Gaußkoeffizienten und den Multipolmomenten soll im weiteren Verlauf ebenfalls aufgezeigt werden. Die Kugelfunktionsentwicklung bietet eine einfache Möglichkeit, das magnetische Energiespektrum zu berechnen (Abschnitt 2.2).

In Abschnitt 2.3 wird auf die zeitliche Entwicklung des Magnetfeldes an Hand von Beobachtungen der letzten 100 Jahre eingegangen. Es wird nicht nur dargestellt, wie sich das Magnetfeldes in dieser Zeit geändert hat, sondern es soll auch eine Abschätzung darüber gegeben werden, wie sich das Magnetfeld in den nächsten Jahren möglicherweise entwickeln könnte.

Der Abschnitt 2.4 dieses Kapitels beschäftigt sich mit einigen Grundlagen des Paläomagnetismus, also den Magnetfeldänderungen auf geologischen Zeitskalen, zu denen auch die Feldumkehrung gehört. Feldumkehrungen finden in unregelmäßigen Abständen alle  $10^5$  bis  $10^6$  Jahre statt, während der eigentliche Umkehrungsprozeß im Mittel 7000 Jahre dauert (Clement, 2004). Die genauen Mechanismen einer Feldumkehrung sollen in dieser Arbeit nicht näher betrachtet werden, dazu sei unter anderem auf Wicht und Olson (2004) verwiesen. Ein wesentlicher Punkt, der in diesem Abschnitt angesprochen wird, ist die Frage nach möglichen Magnetfeldkonfigurationen, die während einer Feldumkehr zum Tragen kommen.

Während sich die ersten vier Abschnitte dieses Kapitels mit dem inneren Magnetfeld beschäftigen, behandeln die letzten Abschnitte das äußere Magnetfeld, das durch Stromsysteme erzeugt wird. Bei der heutigen Magnetosphäre spielen folgende Ströme eine Rolle: die Chapman-Ferraro-Ströme, die durch Wechselwirkung des Sonnenwindes mit dem Erdmagnetfeld entstehen, der äquatoriale Ringstrom, der aus eingefangenen Teilchen besteht, die Schweifströme, die durch Plasmakonvektion im Schweif erzeugt werden, und die feldparallelen Ströme, die durch die polaren Elektrojets in der Ionosphäre geschlossen werden (siehe Abschnitt 2.5).

In den letzten Jahrzehnten wurden unterschiedliche Modelle zur Beschreibung der Magnetosphäre entwickelt. Siscoe (2001) unterscheidet zwischen vier verschiedenen Arten von Magnetosphärenmodellen: empirische, modulare, die im folgenden auch als potentialtheoretische Modelle bezeichnet werden, kinetische und MHD-Modelle. Empirische Modelle wurden unter anderem von Mead und Fairfield (1975), Olson und Pfitzer (1977; 1982), Alexeev (1978) und Tsyganenko (1987; 1989; 2002) entwickelt. Die Strategie dieser Modelle beruht in der Anpassung von Modellparametern an Sa-

tellitendaten, wodurch die heutige Magnetosphäre sehr gut beschrieben werden kann. Voigt (1981), Stern (1985), Hilmer und Voigt (1995), Romashchenko und Reshetnikov (2000), Willis et al. (2000) entwickelten sogenannte potentialtheoretische Magnetosphärenmodelle. Hierbei wird bei einer fest vorgegebenen Magnetosphärengometrie und einem vorgegebenen inneren Magnetfeld ein Potentialansatz zur Beschreibung des Magnetfeldes in der Magnetosphäre gewählt. Kinetische Modelle, wie u. a. von Alexeev und Kalegaev (1995), aber vor allem MHD-Simulationen (z. B. Wolf, 1983; Gombosi et al., 1996) bieten eine gute Möglichkeit, die komplexen Stromsysteme und Felder in der Magnetosphäre realistisch zu beschreiben.

In Abschnitt 2.6 werden verschiedene der eben angesprochenen Magnetosphärenmodelle vorgestellt. Voigt (1976) und Jordan (1994) zeigten in ihren Arbeiten Vor- und Nachteile einiger Modelle in Bezug auf die Beschreibung der heutigen Magnetosphäre. In dieser Arbeit hingegen werden die Modelle unter dem Gesichtspunkt betrachtet, inwieweit sie sich als parametrische Modelle zur Beschreibung beliebiger Magnetosphären eignen. Gesucht wird ein einfaches Modell, das sich rechentechnisch möglichst unkompliziert umsetzen läßt. Denn unter anderem soll das Modell verwendet werden, um Teilchenbahnen innerhalb der Magnetosphäre zu bestimmen, d. h. das Magnetfeld muß an einigen Tausend Stellen innerhalb kurzer Zeit bestimmt werden. Dabei wird besonders auf das zylindrische Modell von Voigt (1981) und das sphärische Modell von Willis et al. (2000) eingegangen, weil sie die genannten Bedingungen erfüllen und im weiteren Verlauf verwendet werden. In beiden Fällen handelt es sich um potentialtheoretische Modelle.

## 2.1. Multipolentwicklung

Die Darstellung des Erdmagnetfeldes durch Multipole kommt aus der Potentialtheorie und soll im folgenden kurz dargelegt werden. Ausführliche Beschreibungen sind bei Chapman und Bartels (1962) oder Kertz (1992) zu finden.

Da in dieser Arbeit keine dynamischen Berechnungen durchzuführen werden, sondern nur eine Abfolge statischer Zustände des Magnetfeldes betrachtet werden, kann man die Magnetfeldbeschreibungen auf ein statisches Problem zurückführen, bei dem alle zeitlichen Ableitungen entfallen. Als zweite Vereinfachung wird der Beobachtungsraum eingeschränkt, in dem das Magnetfeld berechnet werden soll. Die hydromagnetischen Prozesse im Erdinneren, die zur Erzeugung des Erdmagnetfeldes führen, werden nicht näher betrachtet. Von Interesse ist lediglich das Ergebnis dieser Prozesse, nämlich das Magnetfeld an der Erdoberfläche bzw. im Außenraum der Erde. Die Quellen des inneren Magnetfeldes lassen sich somit in einer Kugel mit dem Radius  $r = R_e$  einschließen. Der Beobachtungsraum beschränkt sich dann auf den Außenraum der Erde, aber auch hier erfolgen noch weitere Einschränkungen; denn es ist lediglich der Raum innerhalb der Magnetosphäre von Interesse.

Auf die Magnetosphäre und besonders ihre Stromsysteme wird in Kapitel 2.5 eingegangen. An dieser Stelle soll lediglich angenommen werden, daß innerhalb der Ma-

## 2. Das Magnetfeld der Erde

---

gnetosphäre keine Ströme fließen sollen, also  $\underline{j} = 0$ . Gleiches gilt auch für die Verschiebungsstromdichte  $\underline{\dot{D}} = 0$ .

Mit Hilfe von potentialtheoretischen Betrachtungen kann nun eine Lösung für das Magnetfeld  $\underline{H}$  gefunden werden. Unter den eben beschriebenen Annahmen vereinfacht sich das Amperesche Gesetz der Maxwellgleichungen zu

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \underline{\dot{D}} = 0. \quad (2.1)$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe eines skalaren Potentials  $\nabla\Phi$  gelöst werden, indem man den Ansatz

$$\underline{H} = -\nabla\Phi \quad (2.2)$$

wählt. Hierbei wird die Vektoridentität  $\nabla \times \nabla\phi \equiv 0$  ausgenutzt.

Zieht man in Betracht, daß im Außenraum der Erde die Magnetisierung verschwindet, also  $\underline{M} = 0$ , berechnet sich die magnetische Induktion aus  $\underline{B} = \mu_0(\underline{H} + \underline{M})$  zu

$$\underline{B} = -\mu_0\nabla\Phi. \quad (2.3)$$

Im folgenden wird  $\underline{B}$  der Einfachheit halber und wie in der Geophysik gebräuchlich als Magnetfeld bezeichnet.

Setzt man Gleichung (2.3) in die Maxwellgleichung  $\nabla \cdot \underline{B} = 0$  ein, so ergibt sich

$$\nabla \cdot (-\mu_0\nabla\Phi) = -\mu_0\nabla^2\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi = 0. \quad (2.4)$$

Es gilt nun eine Lösung dieser Laplacegleichung zu finden. Für kartesischen Koordinaten gibt Lense (1954) folgenden Multipolansatz als Lösung an:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^{n-\alpha} a_{n\alpha\beta} \frac{x^\alpha y^\beta z^{n-\alpha-\beta}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(2n+1)/2}}. \quad (2.5)$$

Hierbei ist  $n$  der Grad des Multipols. Jeder Multipol wird durch  $(n+1)(n+2)/2$  Koeffizienten  $a_{n\alpha\beta}$  beschrieben, von denen lediglich  $2n+1$  linear unabhängig sind. Die Abhängigkeit und somit die Anzahl der linear unabhängigen Koeffizienten kann aus der Laplacegleichung bestimmt werden.

Da das Dipol- und Quadrupolmoment in dieser Arbeit eine wesentliche Rolle spielen, werden die Potentiale hier explizit angegeben.

Das Potential eines Dipols ist mit Gleichung (2.5) gegeben durch

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=0}^{1-\alpha} a_{1\alpha\beta} \frac{x^\alpha y^\beta z^{1-\alpha-\beta}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{a_1^{00}z + a_1^{01}y + a_1^{10}x}{r^3}. \quad (2.6)$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit der bekannten Gleichung für das Potential eines Dipols (siehe Jackson, 1963):

$$\Phi = \frac{m_x x + m_y y + m_z z}{4\pi r^3} = \frac{\underline{m} \cdot \underline{r}}{4\pi r^3}, \quad (2.7)$$

wobei  $\underline{m}$  das Dipolmoment ist.

Das Potential eines Quadrupols wird nach Gleichung (2.5) beschrieben durch

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^{2-\alpha} a_{2\alpha\beta} \frac{x^\alpha y^\beta z^{2-\alpha-\beta}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{a_2^{00} z^2 + a_2^{01} yz + a_2^{02} y^2 + a_2^{10} xz + a_2^{11} xy + a_2^{20} x^2}{r^5}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Bei entsprechender Wahl der Koeffizienten läßt sich diese Gleichung auf die bekannte Gleichung eines Quadrupols zurückführen (siehe Jackson, 1963):

$$\Phi = \frac{Q_{xx}x^2 + Q_{yy}y^2 - (Q_{xx} + Q_{yy})z^2 + 2Q_{xy}xy + 2Q_{xz}xz + 2Q_{yz}yz}{8\pi r^5} = \frac{\underline{r}^T \underline{Q} \underline{r}}{8\pi r^5}, \quad (2.9)$$

hierbei ist  $\underline{r}^T$  der transponierte Vektor zum Vektor  $\underline{r}$ . Aus einem Koeffizientenvergleich der  $a_{2\alpha\beta}$  und der  $Q_{ij}$  folgt, daß der Quadrupoltensor  $\underline{Q}$  symmetrisch ist und  $\text{Spur}(\underline{Q})=0$  gilt. Die Spurfreiheit des Quadrupoltensors folgt auch direkt aus der Divergenzfreiheit des Magnetfeldes, während sich die Symmetrie des Tensors aus der Rotationsfreiheit des Feldes ergibt.

Im Fall der Erde bietet es sich an, statt kartesischer Koordinaten sphärische zu verwenden. Die Definitionen und Umrechnungen von Koordinatensystemen sind im Anhang A.1 beschrieben.

Für sphärische Geometrie hat Gauß (1839) eine Lösung der Laplacegleichung mit Hilfe von Kugelfunktionen entwickelt (siehe auch Chapman und Bartels, 1962; Kertz, 1992):

$$\Phi(r, \vartheta, \lambda) = \frac{R_e}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta) \quad (2.10)$$

mit den zugeordneten Kugelfunktionen  $P_n^m$  vom Grad  $n$  und der Ordnung  $m$  in der Schmidtschen Normierung. Die Koeffizienten  $g_n^m$  und  $h_n^m$  sind die Gaußkoeffizienten. Das Potential (2.10) wurde so eingeführt, daß die Gaußkoeffizienten die Einheit nT haben. Im hier vorliegenden Fall ist  $R_e$  der Erdradius. Näheres zu den Kugelfunktionen, ihren Eigenschaften und Berechnungen ist im Anhang A.2 zu finden.

Statt der in der Geophysik üblichen Gaußkoeffizienten  $g_n^m$  und  $h_n^m$  werden in dieser Arbeit die Koeffizienten  $c_n^m$  und  $\lambda_n^m$  verwendet, die über folgende Beziehungen mit einanderverknüpft sind (Roederer et al., 1973):

$$c_n^m = \begin{cases} g_n^m, & m = 0 \\ \sqrt{(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2}, & m > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lambda_n^m = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ \frac{1}{m} \arctan \frac{h_n^m}{g_n^m}, & m > 0 \end{cases} \quad (2.11a)$$

bzw.

$$g_n^m = c_n^m \cos m\lambda_n^m \quad \text{und} \quad h_n^m = c_n^m \sin m\lambda_n^m. \quad (2.11b)$$

Somit ergibt sich für das Potential:

$$\Phi = \frac{R_e}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^{n+1} c_n^m \cos m(\lambda - \lambda_n^m) P_n^m(\cos \vartheta). \quad (2.12)$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, daß die Stärke des Magnetfeldes durch die Koeffizienten  $c_n^m$  beschrieben werden kann, während die Koeffizienten  $\lambda_n^m$  die Magnetfeldkonfiguration bestimmen. So entspricht  $\lambda_n^m$  z. B. im Fall eines reinen Multipols einer Drehung des Moments um die  $z$ -Achse an.

Das Magnetfeld an einem beliebigen Punkt  $(r, \vartheta, \lambda)$  berechnet sich aus Gleichung (2.3) zu:

$$B_r(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^{n+2} (n+1) c_n^m \cos m(\lambda - \lambda_n^m) P_n^m(\cos \vartheta), \quad (2.13a)$$

$$B_{\vartheta}(r, \vartheta, \lambda) = - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^{n+2} c_n^m \cos m(\lambda - \lambda_n^m) \frac{dP_n^m(\cos \vartheta)}{d\vartheta}, \quad (2.13b)$$

$$B_{\lambda}(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^{n+2} m c_n^m \sin m(\lambda - \lambda_n^m) \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta}. \quad (2.13c)$$

Beispiele für Magnetfeldlinien verschiedener Multipolentwicklungen sind in Kapitel 4 zu finden.

In der Geophysik, wie auch in dieser Arbeit, werden die Begriffe der Momente und Gaußkoeffizienten gleichwertig verwendet. Deshalb wird an dieser Stelle die Umrechnung der einen Größe in die andere gezeigt. Speziell handelt es sich hierbei um Dipol- bzw. Quadrupolmoment und den entsprechenden Gaußkoeffizienten, denn diese werden hauptsächlich in späteren Anwendungen benutzt, z. B. bei der Berechnung des magnetosphärischen Magnetfeldes in Kapitel 3.

In sphärischer Geometrie läßt sich das Potential mittels der Kugelfunktionsentwicklung wie in Gleichung (2.10) darstellen. Berechnet man hieraus den Dipolanteil  $\Phi_d$  und den Quadrupolanteil  $\Phi_q$ , dann ergibt sich für den Dipol ( $n = 1$ ) unter Einbeziehung der Transformation (A.1) von sphärischen in kartesische Koordinaten folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Phi_d &= \frac{R_e^3 g_1^0 P_1^0(\cos \vartheta) + (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi) P_1^1(\cos \vartheta)}{\mu_0 r^2} \\ &= \frac{R_e^3 g_1^0 \cos \vartheta + (g_1^1 \sin \vartheta \cos \phi + h_1^1 \sin \vartheta \sin \phi)}{\mu_0 r^2} = \frac{R_e^3 g_1^0 z + (g_1^1 x + h_1^1 y)}{\mu_0 r^3} \end{aligned} \quad (2.14)$$

und für den Quadrupol ( $n = 2$ ,  $P_n^m = P_n^m(\cos \vartheta)$ ):

$$\begin{aligned}\Phi_q &= \frac{R_e^4 g_2^0 P_2^0 + (g_2^1 \cos \phi + h_2^1 \sin \phi) P_2^1 + (g_2^2 \cos 2\phi + h_2^2 \sin 2\phi) P_2^2}{\mu_0 r^3} \\ &= \frac{R_e^4 g_2^0 z - \frac{1}{2} g_2^0 (x^2 + y^2) + \sqrt{3} g_2^1 xz + \sqrt{3} h_2^1 yz + \frac{\sqrt{3}}{2} g_2^2 (x^2 - y^2) + \sqrt{3} h_2^2 xy}{\mu_0 r^5}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Aus einem Koeffizientenvergleich mit den Potentialen in kartesischer Form, die in den Gleichungen (2.7) und (2.9) gegeben sind, erhält man dann für den Dipol:

$$m_x = \frac{4\pi R_e^3}{\mu_0} g_1^1, \quad m_y = \frac{4\pi R_e^3}{\mu_0} h_1^1, \quad m_z = \frac{4\pi R_e^3}{\mu_0} g_1^0 \quad (2.16)$$

und den Quadrupol:

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= \frac{4\pi R_e^4}{\mu_0} (-g_2^0 + \sqrt{3} g_2^2), & Q_{yy} &= \frac{4\pi R_e^4}{\mu_0} (-g_2^0 - \sqrt{3} g_2^2), \\ Q_{xy} &= \frac{4\pi \sqrt{3} R_e^4}{\mu_0} h_2^2, & Q_{xz} &= \frac{4\pi \sqrt{3} R_e^4}{\mu_0} g_2^1, & Q_{yz} &= \frac{4\pi \sqrt{3} R_e^4}{\mu_0} h_2^1.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Um höhere Momente umzurechnen, geht man analog zu dem eben angeführten Rechenweg vor. Für den Koeffizientenvergleich benutze man dann die Gleichungen (2.5) und (2.10) bzw. (2.12).

## 2.2. Energie des Magnetfeldes

Das im Erdinneren erzeugte Magnetfeld kann man in einen toroidalen und einen poloidalen Anteil zerlegen. An der Erdoberfläche läßt sich nur das poloidale Feld messen. Auf Grund dessen ist es nicht möglich, die gesamte Energie des Erdmagnetfeldes anzugeben. Ebenso wenig kann man eine Aussage über die Erhaltung der Energie treffen, denn es kann nicht unterschieden werden, ob die magnetische Energie variiert oder lediglich zwischen dem poloidalen und toroidalen Anteil hin und her wechselt. Im folgenden meint der Begriff „Energie“ also die Energie des poloidalen Anteils.

Die Energie des Erdmagnetfeldes läßt sich aus den Gaußkoeffizienten bestimmen, wie es Mauersberger (1956), Lowes (1966) und Langel (1987) zeigen. Ausgangspunkt ist die Beschreibung des Magnetfeldes als Kugelfunktionsentwicklung, wie sie im ersten Abschnitt dieses Kapitels mit Gleichung (2.10) eingeführt wurde. An Hand dieser Darstellung wird ein Potential  $\Phi_n$  für jeden Grad  $n$  der Multipolentwicklung definiert:

$$\Phi_n = \frac{R_e}{\mu_0} \left( \frac{R_e}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta). \quad (2.18)$$

Damit ergibt sich für das Magnetfeld und die magnetische Induktion für den Grad

$$\underline{H}_n = -\nabla \Phi_n \quad \text{und} \quad \underline{B}_n = -\mu_0 \nabla \Phi_n. \quad (2.19)$$

## 2. Das Magnetfeld der Erde

---

Die Energiedichte eines Magnetfeldes ist definiert als:

$$\tilde{w}_n := \frac{1}{2} \underline{B}_n \cdot \underline{H}_n = \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \Phi_n)^2. \quad (2.20)$$

Durch Integration über den Außenraum der Kugel ergibt sich hieraus die Gesamtenergie im Außenraum der Kugel mit dem Radius  $R_e$  zu

$$W_n = \iiint_{r>R_e} \tilde{w}_n dV = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{r>R_e} (\nabla \Phi_n)^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{r=R_e} \Phi_n \underline{\hat{n}} \cdot \nabla \Phi_n df. \quad (2.21)$$

Für die Umformung des Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral wurde hierbei der erste Greensche Satz verwendet. Das Flächenelement  $df$  läßt sich durch  $df = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\lambda$  ausdrücken. Da es sich um die Energie im Außenraum der Kugel handelt, zeigt der Normalenvektor  $\underline{\hat{n}}$  nach innen und ist somit bis auf das Vorzeichen identisch mit dem Einheitsvektor in radialer Richtung  $\underline{\hat{n}} = -\underline{e}_r$ . Das Produkt aus Normalenvektor und Gradienten von  $\Phi_n$  vereinfacht sich dann zu

$$\underline{\hat{n}} \cdot \nabla \Phi_n = -\frac{\partial}{\partial r} \Phi_n = (n+1) \frac{1}{r} \Phi_n. \quad (2.22)$$

Damit geht die Gesamtenergie aus Gleichung (2.21) über in

$$W_n = \frac{n+1}{2\mu_0} r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi_n \Phi_n \sin \vartheta d\vartheta d\lambda. \quad (2.23)$$

Ersetzt man nun in dieser Gleichung das Potential durch seine Reihenentwicklung (2.18), so ergibt sich nach Vertauschung der Summation und Integration

$$W_n = \frac{n+1}{2\mu_0} R_e r \left( \frac{R_e}{r} \right)^{2n+2} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \left[ \int_0^{2\pi} (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) (g_l^l \cos l\lambda + h_l^l \sin l\lambda) d\lambda \right. \\ \left. \cdot \int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta) P_n^l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right]. \quad (2.24)$$

Bei der Integration über den Winkel  $\vartheta$  wird die Orthogonalitätsrelation der Kugelfunktionen ausgenutzt, siehe hierzu Gleichung (A.20) im Anhang A.2, so daß lediglich die Terme  $m = l$  übrigbleiben und die Summe über  $l$  wegfällt. Der Wert des Integrals beträgt dann

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2c}{2n+1} \quad \text{mit} \quad c = \begin{cases} 1, & m = l = 0 \\ 2, & m = l > 0 \end{cases}. \quad (2.25)$$

Auf Grund der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\lambda \, d\lambda = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\lambda \, d\lambda = \frac{2\pi}{c} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos m\lambda \sin m\lambda \, d\lambda = 0, \quad (2.26)$$

so daß sich das Integral über den Winkel  $\lambda$  zu:

$$\int_0^{2\pi} [(g_n^m)^2 \cos^2 m\lambda + (h_n^m)^2 \sin^2 m\lambda + 2g_n^m h_n^m \cos m\lambda \sin m\lambda] \, d\lambda \quad (2.27)$$

$$= \frac{2\pi}{c} [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2]. \quad (2.28)$$

vereinfacht. Als Endergebnis für die Gesamtenergie ergibt sich dann

$$W_n = \frac{2\pi}{\mu_0} \frac{n+1}{2n+1} R_e^2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^{2n+1} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2]. \quad (2.29)$$

Sei nun  $w_n$  die mittlere Energie des Grades  $n$  auf einer Kugelschale mit dem Radius  $r$ , dann berechnet sich die Gesamtenergie im Außenraum durch Integration über  $r'$  zu

$$W_n = \int_r^\infty w_n(r') \cdot 4\pi r'^2 \, dr' \quad \Rightarrow \quad w_n = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial W_n}{\partial r}, \quad (2.30)$$

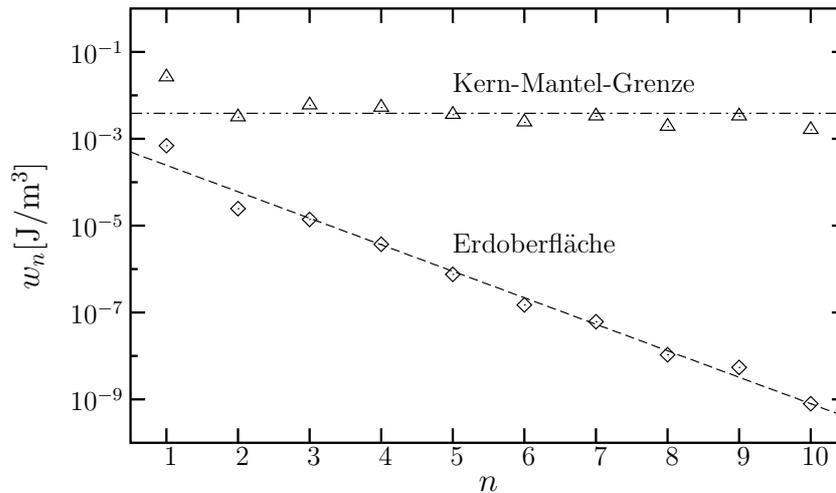
und umgekehrt erhält man die mittlere Energie  $w_n$  durch Differentiation der Gesamtenergie nach  $r$ . Zusammen mit Gleichung (2.29) ergibt sich für die mittlere Energie  $w_n$  auf einer Kugelschale mit dem

Radius  $r$ :

$$w_n = \frac{n+1}{2\mu_0} \left(\frac{R_e}{r}\right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] = \frac{(n+1)}{2\mu_0} \left(\frac{R_e}{r}\right)^{2n+4} \sum_{m=0}^n (c_n^m)^2. \quad (2.31)$$

Bis auf Vorfaktoren entspricht dieses Ergebnis den sogenannten Mauersberger Koeffizienten  $R_n$ , die das Spektrum des Erdmagnetfeldes beschreiben (siehe Langel und Estes, 1982).

Abbildung 2.1 zeigt das heutige Energiespektrum des Erdmagnetfeldes bis zum Grad  $n = 10$ . Aufgetragen ist zum einen das Energiespektrum an der Erdoberfläche und zum anderen an der Kern-Mantel-Grenze. Die Punkte liegen nahezu auf einer Geraden, wobei auffällt, daß der Dipolanteil ( $n=1$ ) deutlich oberhalb liegt. Lägen alle Koeffizienten auf einer Geraden, die an der Kern-Mantel-Grenze keine Steigung aufweist, so würde dies eine Gleichverteilung der Energie auf alle Multipolanteile an der Kern-Mantel-Grenze bedeuten.



**Abbildung 2.1.:** Energiespektrum (bis zum Grad 10) des heutigen Erdmagnetfeldes an der Erdoberfläche und an der Kern-Mantel-Grenzen.

### 2.3. Säkularvariationen

Säkularvariationen sind Magnetfeldänderungen, die sich auf Zeitskalen von Jahren bis hin zu Jahrhunderten abspielen. Verursacht werden solche Änderungen durch Prozesse im Erdinneren.

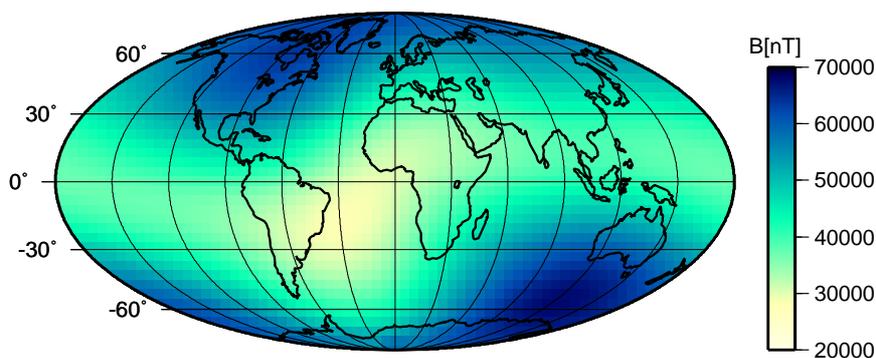
Heute gibt es weltweit über 500 Observatorien, von denen zur Zeit ungefähr 150 das Erdmagnetfeld kontinuierlich beobachten und auch Jahresmittelwerte zur Verfügung stellen. In Europa gibt es hinreichend viele Standorte, während in anderen Gegenden, besonders auf den Ozeanen, kaum welche zu finden sind. Diese ungleiche Standortverteilung erschwert eine globale Analyse des Magnetfeldes. In den letzten Jahrzehnten wurden auch Magnetfeldmessungen mittels Satelliten durchgeführt, die den Vorteil haben, daß sie die Erde zum einen gleichmäßig mit Meßpunkten abdecken können und zum anderen eine viel höhere Meßdichte liefern. Ein Problem bei den Satellitenmessungen ist die Trennung von räumlichen und zeitlichen Änderungen des Signals. Es soll an dieser Stelle nicht näher auf die Meßtechniken und -instrumente eingegangen werden, einige Grundlagen dazu sind bei Kertz (1992) oder Campbell (1997) zu finden, sondern es geht im folgenden mehr um die zeitlichen Veränderungen der letzten hundert Jahre und um mögliche Extrapolationen für die kommenden Jahre.

#### 2.3.1. Zeitliche Entwicklung in den letzten hundert Jahren

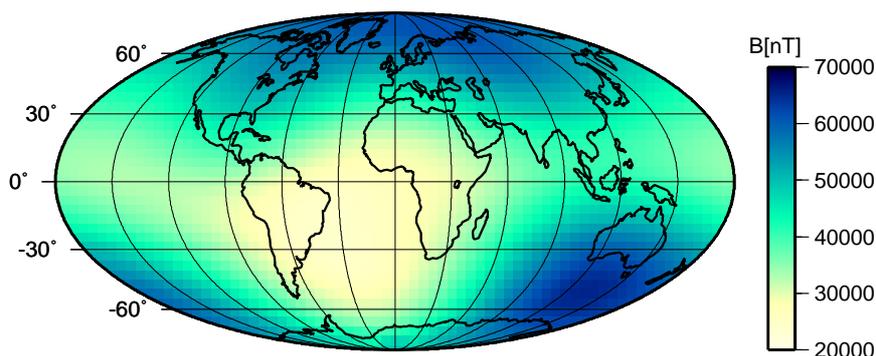
Die International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA) errechnet aus beobachteten Magnetfelddaten alle fünf Jahre ein sogenanntes Internationales Geomagnetisches Referenzfeld (IGRF), das jeweils durch einen Satz von Gaußkoeffizienten beschrieben wird. Hierfür wurden anfangs vorwiegend Observatoriumsdaten,

mittlerweile aber auch verstärkt Satellitenmessungen verwendet. Inzwischen gibt es auch komplexere Modelle (Maus et al., 2002), die aus neuen Satellitendaten gewonnen werden und das Erdmagnetfeld besser beschreiben als das IGRF. Diese haben aber den Nachteil, daß verhältnismäßig viele Parameter zur Beschreibung benötigt werden. Für die Betrachtungen in dieser Arbeit ist eine so exakte Beschreibung des Erdfeldes nicht notwendig. Ziel ist es vielmehr, großräumige Strukturen und Phänomene aufzuzeigen. Dazu reichen die Gaußkoeffizienten der Grade  $n = 1, 2, 3$  aus. Abbildung 2.2 zeigt den Magnetfeldbetrag des IGRF für die Jahre 1900 und 2000, der sich aus den Gaußkoeffizienten bis zum dritten Grad ergibt.

Gut zu erkennen ist in beiden Darstellungen, daß das Magnetfeld der Erde im wesentlichen durch einen leicht geneigten Dipol beschrieben werden kann. Das Feld hat ein Maximum am Pol über Nordamerika bzw. Australien und ein Minimum in der Äquatorregion. Die Intensität des Magnetfeldes hat im Laufe der letzten hundert Jahre



(a) Betrag des Magnetfeldes um 1900, IGRF1900.

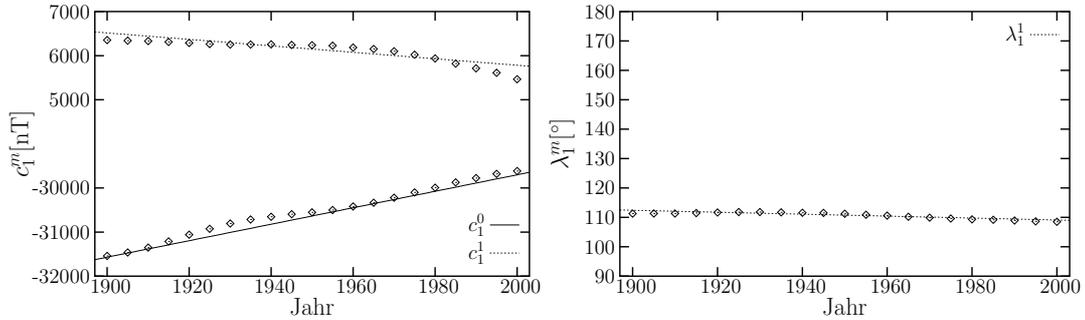


(b) Betrag des heutigen Magnetfeldes, IGRF2000.

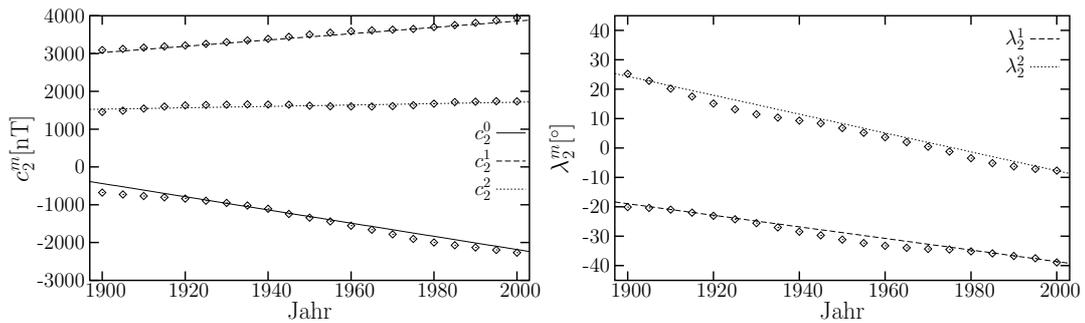
**Abbildung 2.2.:** Magnetfeldbetrag auf der Erdoberfläche von 1900 und 2000 (Multipolentwicklung bis zum Grad  $n = 3$ ).

## 2. Das Magnetfeld der Erde

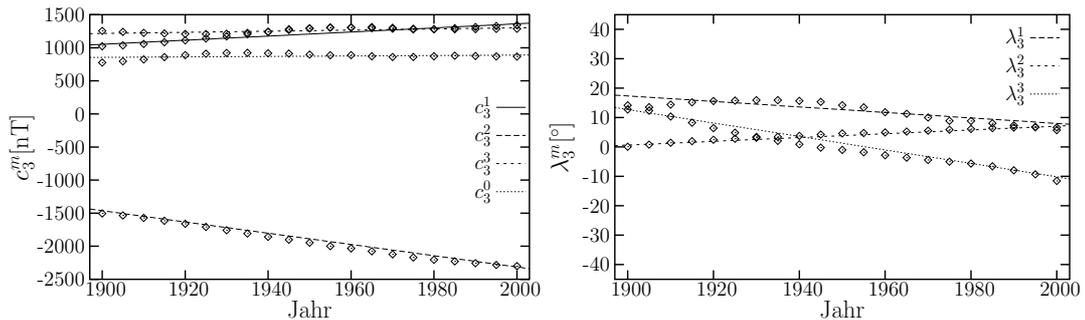
überall auf der Erdoberfläche abgenommen. Die klare dipolare Struktur des Magnetfeldes im Jahre 1900 wird hundert Jahre später durch die stärkere Ausprägung der südantlantischen Anomalie, dem Minimum im Südatlantik, etwas aufgeweicht.



(a) Entwicklung des Dipolanteils.



(b) Entwicklung des Quadrupolanteils.



(c) Entwicklung des Oktupolanteils.

**Abbildung 2.3.:** Entwicklung der Gaußkoeffizienten bis zum Grad  $n = 3$  von 1900 bis 2000 mit den jeweiligen linearen Anpassungen. Auf der linken Seite sind jeweils die „Beträge“  $c_n^m$  der Multipole (diese können durchaus negativ sein) aufgetragen, auf der rechten Seite die Drehwinkel  $\lambda_n^m$  um die  $z$ -Achse.

Um die Struktur des Magnetfeldes und die Änderungen in den letzten hundert Jahren besser zu verstehen, wirft man am besten einen Blick auf die Gaußkoeffizienten, speziell bis zum Grad  $n = 3$  der Kugelfunktionsentwicklung. Abbildung 2.3 zeigt die Entwicklung der Dipol-, Quadrupol- und Oktupolanteile. In den Abbildungen auf der linken Seite ist jeweils der Betrag  $c_n^m$  des Multipols aufgetragen, auf der rechten Seite hingegen der Drehwinkel  $\lambda_n^m$  um die  $z$ -Achse (die Rotationsachse der Erde). Die Dipolanteile, repräsentiert durch die  $c_1^m$ -Terme, haben im Laufe der hundert Jahre abgenommen, während die höheren Multipolanteile, wie Quadrupol ( $c_2^m$ ) und Oktupol ( $c_3^m$ ) zugenommen haben. Der Dipol hat sich kaum gedreht, im Gegensatz zum Quadrupol und Oktupol, die eine leichte Drehung nach Westen aufzeigen.

Da der zonale Dipolanteil ( $c_1^0$ ) der Hauptmultipol des Erdmagnetfeldes ist, folgt bei seiner Abnahme, daß das Magnetfeld an der Erdoberfläche geringer wird. Durch das Geringerwerden des Dipols und das gleichzeitige Anwachsen der höheren Multipole ist auch ersichtlich, warum die dipolare Struktur im Jahre 2000 gegenüber 1900 etwas aufgeweicht wurde und sich die südatlantische Anomalie weiter ausgeprägt hat. Die südatlantische Anomalie ist im wesentlichen ein Effekt der Überlagerung des Dipols mit dem Quadrupol, bei dem antiparallel gerichtete Feldlinien das Gesamtfeld schwächen.

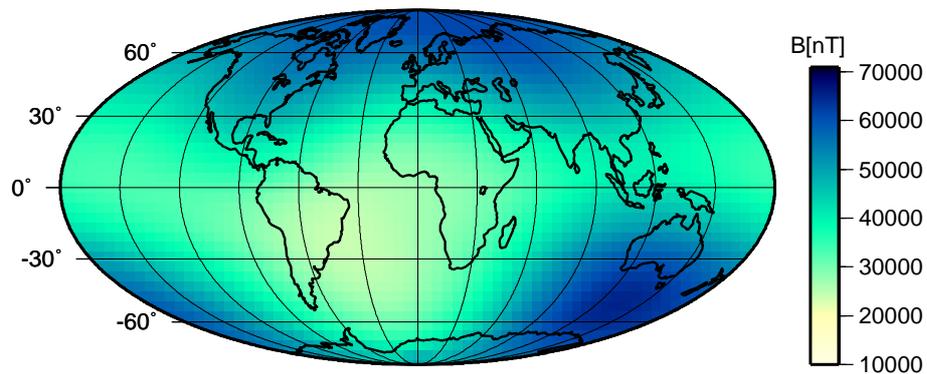
### 2.3.2. Magnetfelder für extrapolierte Gaußwerte

Die Entwicklungen der Gaußkoeffizienten bis zum dritten Grad sind in den letzten hundert Jahren nahezu linear und man könnte sich nun überlegen, wie eine Extrapolation in die Zukunft aussähe. Natürlich stellt sich hierbei die Frage, inwiefern erstens eine lineare Extrapolation gerechtfertigt ist und zweitens über welchen Zeitraum dieses geschehen darf.

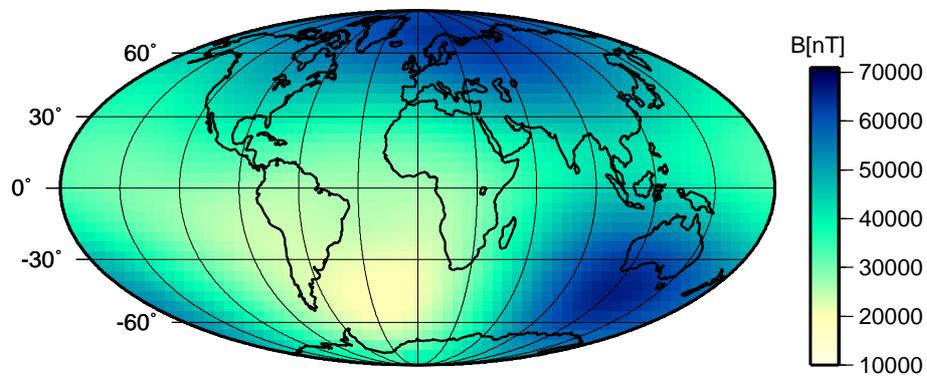
Im folgenden wird ein Beispiel konstruiert, bei dem die Magnetfeldentwicklung des letzten Jahrhunderts in gleicher Art und Weise für die nächsten Jahrhunderte fortgesetzt wird. Dazu werden die Gaußkoeffizienten der ersten drei Grade linear extrapoliert. Abbildung 2.4 zeigt den Betrag des Magnetfeldes an der Erdoberfläche für die nächsten zwei Jahrhunderte, wobei in der oberen Graphik zum Vergleich das Magnetfeld zu sehen ist, daß sich aus den Gaußkoeffizienten des IGRF2000 bis zum Grad  $n = 3$  zusammensetzt. Der maximale Betrag des Erdmagnetfeldes steigt in den darauffolgenden zwei Jahrhunderten von 68000 nT auf 71000 nT an, dahingegen fällt das Minimum von 22000 nT auf 11000 nT. Die dipolare Struktur des Feldes, maximaler Magnetfeldbetrag an den Polen und minimaler Betrag am Äquator, geht immer weiter verloren, wobei sich die Verhältnisse auf der Nordhalbkugel weniger drastisch ändern als auf der Südhalbkugel. Das breit verschmierte Maximum über dem Nordpol wandert leicht ostwärts, wobei es sich über Nordeuropa konzentriert und an Stärke gewinnt. Das Maximum auf der Südhalbkugel westlich von Australien verändert seine Lage kaum, aber die Magnetfeldstärke nimmt zu. Das Gebiet der heutigen südatlantischen Anomalie verlagert sich südwärts und breitet sich gleichzeitig etwas nach Westen aus; dabei

## 2. Das Magnetfeld der Erde

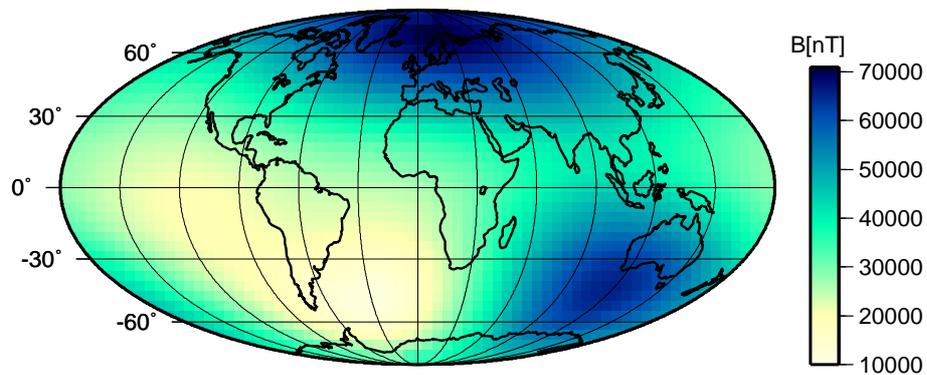
---



(a) Betrag des heutigen Magnetfeldes, IGRF2000.

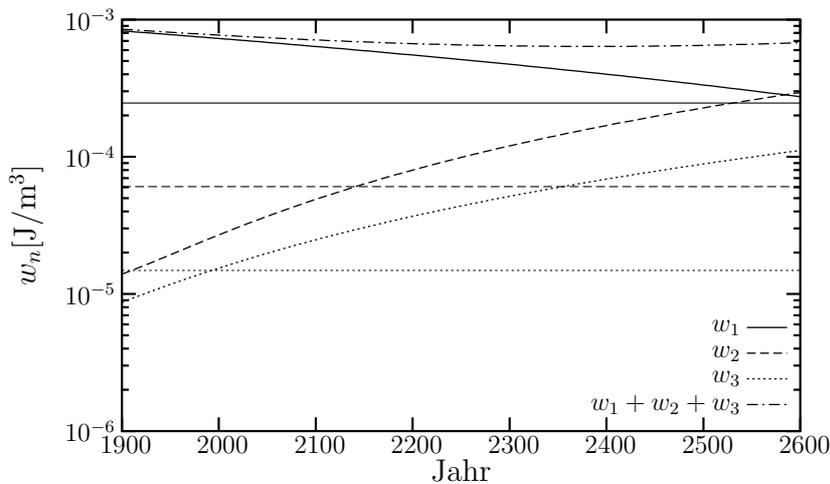


(b) Betrag des Magnetfeldes in 100 Jahre.



(c) Betrag des Magnetfeldes in 200 Jahre.

**Abbildung 2.4.:** Extrapolation des Magnetfeldbetrages an der Erdoberfläche für die nächsten zwei Jahrhunderte (Multipolentwicklung bis zum Grad  $n = 3$ ).



**Abbildung 2.5.:** Die Kurven zeigen die Entwicklung der magnetischen Energien  $w_n$  an der Erdoberfläche, für die nächsten Jahrhunderte, wie sie sich bei einer linearen Extrapolation der Daten der vergangenen Jahrzehnte ergäbe. Die horizontalen Linien sind die zugehörigen Energien, die sich aus einer Gleichverteilung der Energie auf alle Multipole an der Kern-Mantel-Grenze berechnen.

nimmt die Feldstärke ab. Der Intensitätsverlust geht auf die starke Zunahme des Quadrupolmoments zurück, dessen Feldlinien den Dipolfeldlinien entgegengesetzt sind und somit eine Schwächung des Gesamtfeldes herbeiführen, während die Ausweitung nach Westen ein Effekt der kleiner werdenden Drehkoeffizienten  $\lambda_2^m$  sind.

Die magnetische Energien  $w_n$  an der Erdoberfläche dieser extrapolierten Gaußkoeffizienten sind in Abbildung 2.5 zu sehen (gekrümmte Linien). Berechnet wurden sie nach Gleichung (2.31). Die horizontalen Linien stellen die zugehörigen Werte dar, die sich ergäben, wenn die Energien der einzelnen Multipole an der Kern-Mantel-Grenze gleichverteilt wären. Zur Zeit liegt der Dipolanteil deutlich oberhalb dieser Geraden, während der Quadrupolanteil unter ihr liegt, und der Oktupolanteil mit der Gleichverteilung zusammenfällt. Schaut man sich nun den hypothetischen Trend der Multipole für die nächsten Jahrhunderte an, so sieht man, daß das Dipolmoment kleiner wird und in ungefähr 600 Jahren die Gleichverteilung erreichen würde, die höheren Multipolmomente hingegen nähmen zu. Bereits in knapp 200 Jahren hätte der Quadrupol die Gleichverteilung überschritten. In etwas über 600 Jahren kehrte sich das Verhältnis zum heutigen Zustand um, dann wäre die Energie der höheren Multipole größer als die des Dipols.

Die gesamte magnetische Energie (gestrichelpunktete Linie) nimmt auf Grund des dominierenden Dipolanteils bis 2300 ab und steigt dann wieder an, weil die höheren Multipolanteile, deren Energie zunimmt, eine größere Rolle spielen.

## 2.4. Paläomagnetismus

Das Forschungsgebiet des Paläomagnetismus beschreibt Magnetfeldvariationen, die sich auf geologischen Zeiträumen abspielen, also Jahrtausende bis Jahrmillionen umfassen. Zu diesen Variationen werden auch Polwanderungen und Feldumkehrungen gezählt.

Anfang des 20. Jahrhunderts wurden zum ersten Mal umfangreiche Studien zur Magnetisierung von Lavagestein durchgeführt, die dann Mitte des Jahrhunderts um Untersuchungen an Sedimentablagerungen erweitert wurden. Aus den einzelnen Messungen können Rückschlüsse gezogen werden, welche Richtung und Stärke das Magnetfeld bei der Entstehung des Lavagesteins bzw. bei der Ablagerung des Sediments vorherrscht haben. Man kann also für jeden einzelnen Meßort die relativen zeitlichen Variationen bestimmen, problematisch ist eine absolute zeitliche Einordnung der unterschiedlichen Meßorte. Dadurch ist es nur schwer oder gar nicht möglich ein globales Feld zu bestimmen, und man nimmt in erster Näherung an, daß das Magnetfeld durch einen Dipol im Zentrum der Erde beschrieben werden kann. Die Durchstoßpunkte des Dipols zu den einzelnen Zeitpunkten werden in einer sogenannten Polwanderkurve zusammengefaßt. Große Abweichungen des Feldes, bei denen die Polwanderkurve auch die niedrigen geographischen Breiten oder sogar den Äquator berührt, werden als Exkursionen bezeichnet. Überschreitet die Kurve hingegen den Äquator und wandert zum entgegengesetzten Pol, so spricht man von einer Feldumkehrung. Natürlich sehen diese Polwanderkurven für jeden Meßort anders aus, da lokale Messungen als globale Konfigurationen interpretiert werden. Auch kann es vorkommen, daß in dem sehr einfachen Modell der Polwanderkurven eine Feldumkehrung zu sehen ist, es sich aber in Wirklichkeit um eine Überlagerung aus einem schwachen Dipol mit verschiedenen, starken Nichtdipolanteilen handelt. Um solche Fehlerquellen auszuschließen, versucht man, Messungen von verschiedenen Orten miteinander zu vergleichen.

Magnetfeldumkehrungen finden in unregelmäßigen Abständen alle  $10^5$  bis  $10^6$  Jahre statt, wobei die Dauer einer Feldumkehrung in der Literatur unterschiedlich mit Werten zwischen  $10^3$  und  $10^4$  Jahren angegeben wird (Merrill und McFadden, 1999). Neuere Ergebnisse (Clement, 2004) liefern eine durchschnittliche Dauer von 7000 Jahren, wobei die Feldumkehrung scheinbar schneller am Äquator als in den Polregionen abläuft. Zurückzuführen ist dies auf die höheren Multipole, die während einer Polumkehrung eine bedeutende Rolle spielen. Der Mechanismus, der eine Umkehrung auslöst und treibt, ist sehr kompliziert und bis heute nicht in allen Einzelheiten verstanden. Ausführliche Untersuchungen neueren Datums sind unter anderem bei Wicht und Olson (2004) und Wicht (2003) zu finden.

Die einfachsten Modelle einer Feldumkehrung (Merrill und McFadden, 1999) gehen von einem Dipol aus, der entweder kleiner wird, bis er verschwindet und sich dann in umgekehrter Richtung wieder aufbaut, oder der bei gleichbleibender Stärke sich dreht bzw. umkippt. Komplexere Modelle ziehen auch höhere Multipole in Betracht.

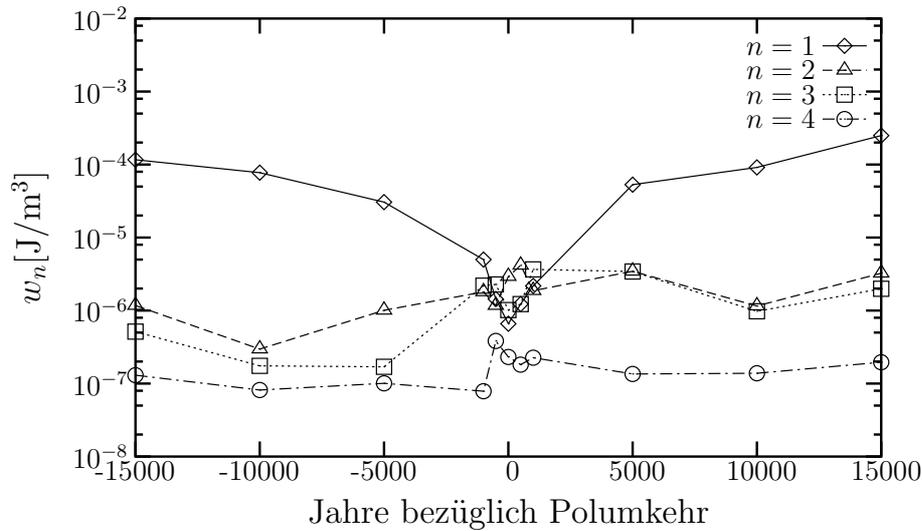
Betrachtet man die Ergebnisse paläomagnetischer Messungen von verschiedenen Lokationen (siehe z. B. Williams und Fuller, 1981; Clement, 1991; Leonhardt et al.,

2003; Heunemann et al., 2004), kann man erkennen, daß während einer Feldumkehrung das Magnetfeld sowohl betragslich abnimmt, als auch seine Richtung ändert. Auch wird deutlich, daß höhere Multipolanteile eine größere Rolle spielen können, als es heute der Fall ist. Eine gute Einführung in das Thema Erdmagnetfeld und Paläomagnetismus geben Merrill et al. (1996). Zu den Meßmethoden des Paläomagnetismus und ihren Ergebnissen siehe auch Soffel (1992).

Um die Prozesse, die zur Entstehung des Erdmagnetfeldes und seine Aufrechterhaltung führen, besser verstehen zu können, wurden im Laufe der letzten Jahrzehnte unterschiedliche Dynamotheorien und -modelle entwickelt. Dabei wird das flüssige Gestein des äußeren Erdkerns als elektrisch leitende Flüssigkeit angenommen, die auf Grund thermischer Konvektion im äußeren Kern aufsteigt, welcher durch eine differentiell rotierende Kugelschale beschrieben wird. Bedingt durch die Konvektion und Rotation wird das bereits existierende Magnetfeld verdrillt und verzerrt, so daß neue Felder entstehen. Auf die genauen Prozesse soll hier nicht weitergegangen werden; dazu sei auf einführende und weitergehende Literatur, unter z. B. Merrill et al. (1996) und Jacobs (1989), verwiesen.

Aus rechentechnischen Gründen werden in vielen Dynamomodellen vereinfachte Annahmen gemacht, die unter anderem dazu führen können, daß keine Feldumkehrungen möglich sind. Numerische Modelle, z. B. von Glatzmaier und Roberts (1995), sind in der Lage, auch Polumkehrungen zu erzeugen. Betrachtet wird im folgenden in einer ihrer Simulation (G. A. Glatzmaier, persönliche Mitteilung 2003) ein Zeitraum von jeweils 15000 Jahren vor und nach der Feldumkehrung. Am Anfang und am Ende dieses Intervalls weist das Magnetfeld deutlich dipolare Strukturen auf, aber mit entgegengesetzter Polarität, was darauf hindeutet, daß eine Polumkehrung stattgefunden hat. Während der Polumkehrung hingegen, die nur ca. 2000 Jahre dauert, ist das Magnetfeld wesentlich komplexer, weil höhere Multipolmomente eine wichtige Rolle spielen, wie auch in Abbildung 2.6 zu sehen ist.

Die in dieser Dissertation erarbeiteten Modell zur Beschreibung von kosmischen Teilchen in Paläomagnetosphären wurde auf Simulationsergebnisse von G. A. Glatzmaier (persönliche Mitteilung 2003) angewendet. Die Simulationsergebnisse von G. A. Glatzmaier sind in Abbildung 2.6 zusammengefaßt. Dargestellt ist die Energie des Magnetfeldes für die Multipole bis zum Grad  $n = 4$  in Abhängigkeit von der Zeit. Als Nullpunkt der Zeitachse wurde dabei die Polumkehrung genommen. Über den gesamten Zeitraum vor der Umkehrung fällt die Energie des Dipols stetig ab, was gleichbedeutend damit ist, daß der Dipolanteil des Magnetfeldes schwächer wird. Aber erst kurz vor der Polumkehrung kommt es zu einem starken Einbruch der Dipolenergie um eine weitere Größenordnungen, so daß sich die eigentliche Feldumkehrung auf einem kurzen Zeitintervall von ungefähr 2000 Jahren abspielt. Danach steigt der Dipolanteil wieder an, bis er seine vorherige Stärke erreicht hat, wobei nun die Richtung des Dipols entgegengesetzt zu dem Ausgangszustand ist. Die höheren Multipolanteile zeigen in ihren magnetischen Energien kein so extremes Verhalten, sondern schwanken lediglich innerhalb einer Größenordnung. In „normalen“ Zeiten liegt die Energie des Dipols zwei bis drei Größenordnungen oberhalb der der höheren Multipole. Wäh-



**Abbildung 2.6.:** Magnetische Energie verschiedener Multipole einer simulierten Feldumkehrung (G. A. Glatzmaier, persönliche Mitteilung 2003).

rend der Feldumkehrung hingegen sinkt die Dipolenergie soweit, daß Quadrupol und Oktupol dominieren.

## 2.5. Magnetosphärische Stromsysteme und Magnetfelder

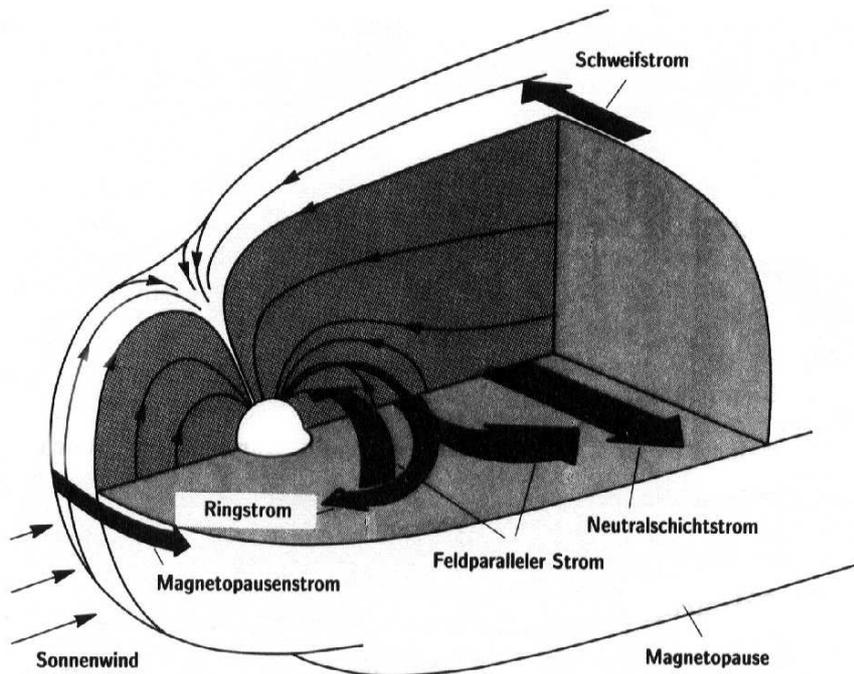
Die Änderungen des Erdmagnetfeldes wirken sich auch auf das magnetosphärische System aus. Siscoe und Chen (1975) führten daher den Begriff einer „Paläomagnetosphäre“ ein. Diese beschreibt die Erdmagnetosphäre zu Zeiten einer Feldumkehrung, und sie unterscheidet sich erheblich von dem heutigen Zustand, sowohl was die Größe, als auch die Art der Stromsysteme und Feldverteilungen betrifft. Verschiedene Aspekte einer Paläomagnetosphäre wurden untersucht, z. B. Änderung der Magnetosphärengröße mit geringer werdendem Magnetfeld (Siscoe und Chen, 1975; Siebert, 1977). Saito et al. (1978) unternahmen qualitative Betrachtungen bezüglich eines gekippten Dipols. Die Konfiguration, bei der der Dipol in der Äquatorebene liegt, bezeichnet man als Pole-on-Konfiguration. Biernat et al. (1985) und Leubner und Zollner (1985) betrachteten Magnetosphären, die statt durch ein dipolares Magnetfeld durch einen Quadrupol bestimmt werden. Noch höhere Multipole schließen Willis et al. (2000) in ihren Untersuchungen ein. Nachteil dieser Modelle ist, daß sie entweder zweidimensional (Biernat et al., 1985; Leubner und Zollner, 1985) oder aber hochgradig symmetrisch (Willis et al., 2000) sind.

In den Kapiteln 4 und 5 sollen mögliche paläomagnetische Magnetosphärenkonfigurationen untersucht werden. Dazu werden zunächst einfache, idealisierte Beispiele für

Dipole und Quadrupole verwendet, um prinzipielle Strukturen für die einzelnen Konfigurationen zu bestimmen. Anschließend werden die komplexeren Konfigurationen der Simulationen von Glatzmaier (persönliche Mitteilung) betrachtet.

Die Magnetosphäre entsteht durch die Wechselwirkung des Erdmagnetfeldes mit dem Sonnenwind. Die geladenen Teilchen des Sonnenwindes strömen auf die Erde zu, werden aber durch ihr Magnetfeld abgelenkt. Die Teilchen können sich nicht mehr geradlinig ausbreiten, sondern müssen um die Erde herumströmen. Dadurch entsteht eine Art Stromlinienkörper, der Magnetosphäre genannt wird. Abbildung 2.7 zeigt die heutige Magnetosphäre.

Das Magnetfeld der Erde läßt sich näherungsweise mit einem Dipol beschreiben, der gegenüber der Rotationsachse der Erde leicht geneigt ist. Auf der Tagseite, also der sonnenzugewandten Seite, werden die Magnetfeldlinien durch den Sonnenwind gestaucht, während sie auf der Nachtseite gestreckt werden und somit den Magnetosphärenschweif bilden. In den sogenannten Cuspreregionen am Nord- bzw. Südpol werden die Feldlinien, die eigentlich der Tagseite angehören, auf die Nachtseite gebeugt. Die Magnetopause stellt die Grenzfläche zwischen dem so verzerrten Erdmagnetfeld und dem interplanetaren Magnetfeld dar. Ein weiterer Begriff, der später häufiger auftaucht, ist der subsolare Punkt. Dies ist der Schnittpunkt der Magnetopause mit der



**Abbildung 2.7.:** Stromsysteme in der Magnetosphäre (entnommen aus Glassmeier und Scholer, 1991).

gedachten Verbindungslinien zwischen Erde und Sonne.

Die Verzerrung des Magnetfeldes und somit die Form der Magnetosphäre entstehen durch Wechselwirkung des Erdmagnetfeldes mit dem Sonnenwind, sowohl mit seinen Teilchen, als auch seinen Feldern. Ein komplexes Stromsystem dient zur Beschreibung der Phänomene und Sachverhalte, siehe hierzu z. B. Glassmeier und Scholer (1991), Baumjohann und Treumann (1996).

In Abbildung 2.7 sind die wichtigsten Stromsysteme mit breiten Pfeilen angedeutet. Im wesentlichen sind das die Chapman-Ferraro-Ströme, auch als Magnetopausenströme bezeichnet, verursacht durch die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit dem Erdmagnetfeld, die Schweifströme, die durch Plasmakonvektion im Schweif erzeugt werden, der von gefangenen Teilchen getragene äquatoriale Ringstrom und die feldparallelen Ströme als Verbindung zwischen Ionosphäre und Magnetosphäre.

Verzerrte Magnetfelder erzeugen nach dem Ampereschen Gesetz  $\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$  stets elektrische Ströme, so auch auf der Tagseite der Magnetosphäre, wo die Magnetfeldlinien der Erde durch den Sonnenwind komprimiert werden und Ursache für die Chapman-Ferraro-Ströme sind. Man kann sich diese Ströme auch an Hand der Wechselwirkung zwischen Sonnenwindteilchen und dem Erdmagnetfeld verdeutlichen. Dazu stelle man sich vor, daß außerhalb der Magnetopause ein so schwaches Magnetfeld herrscht, das die von der Sonne kommenden Teilchen nicht merklich ablenkt. Treffen Teilchen einer bestimmten Energie auf die Magnetopause, wo ein wesentlich höheres Magnetfeld herrscht, so fangen sie an zu gyrieren. Nach einer halben Gyration erreichen sie wieder die Grenze zwischen interplanetarem Magnetfeld und Erdfeld, verlassen die Magnetopause und bewegen sich gradlinig von der Erde weg. Während der halben Gyration bewegen sich die Teilchen im Mittel in eine Richtung senkrecht zum Sonnenwind und senkrecht zum Erdmagnetfeld. Diese Driftbewegung entspricht den Chapman-Ferraro-Strömen, also den Magnetopausenströmen auf der sonnenzugewandten Seite.

Die Chapman-Ferraro-Ströme gehen von der Tagseite über in die Schweifströme auf der Nachtseite. Da die Schweifströme sowohl in der nördlichen, als auch in der südlichen Hemisphäre in die gleiche Richtung fließen, müssen sie über einen weiteren Strom geschlossen werden. Diese Aufgabe übernimmt der Neutralschichtstrom, der in der Äquatorebene in die entgegengesetzte Richtung fließt. Schaut man von der Sonne aus in Richtung des Schweifes, so erkennt man die  $\Theta$ -förmige Struktur der Ströme im Schweif.

Der Ringstrom fließt in der Äquatorebene in westlicher Richtung um die Erde herum. Sein Abstand zur Erde beträgt dabei ungefähr 4-6 Erdradien. Gebildet wird der Ringstrom aus gefangenen Teilchen, vornehmlich aus Protonen mit einer Energie von mehreren zehn Kiloelektronenvolt. Die Teilchen driften nicht nur in der Äquatorebene, sondern führen eine komplizierte Bewegung aus, die sich aus der Driftbewegung in westlicher Richtung um die Erde herum, einer Bouncebewegung entlang der Feldlinien, die mehr oder weniger senkrecht zur Äquatorebene stehen, und einer Gyrationbewegung um die Feldlinien herum zusammensetzt.

Ein weiterer Stromkomplex sind die feldparallelen Ströme, die auch als Birkeland-

ströme bezeichnet werden. Diese Ströme fließen entlang der Magnetfeldlinien von der Magnetosphäre zu den polaren Regionen in die Ionosphäre. Unterschieden wird hierbei zwischen den polwärtigen Strömen, die aus der Magnetopause kommen, und den äquatorwärtigen Strömen, die ihren Ursprung in der Plasmaschicht haben. In der Ionosphäre wird der Stromkreis durch die polaren Elektrojets geschlossen, in ost- und westwärtiger Richtung sind das die Hallströme und in süd- und nordwärtiger Richtung die Pedersenströme.

## 2.6. Magnetosphärenmodelle

Im Laufe der letzten 30 Jahre wurden unterschiedliche Modelle zur Beschreibung des magnetosphärischen Magnetfeldes mit den unterschiedlichsten Zielsetzungen entwickelt: zum einen Modelle, die das momentane Erdmagnetfeld möglichst gut beschreibt, zum anderen vielfältig verwendbare Modelle. Einen guten Überblick über die bekanntesten Modelle geben Jordan (1994) und Siscoe (2001). Einige dieser Modelle sollen im folgenden kurz beschrieben werden. Gleichzeitig wird auch eine Einschätzung gegeben, inwiefern sich die einzelnen Modelle eignen, um Paläomagnetosphären zu berechnen.

### 2.6.1. Magnetohydrodynamische Modelle

Eine gute Darstellung der Magnetosphären auf großen Skalen liefern die magnetohydrodynamischen (MHD) Simulationen. Mit großen Skalen sind zum einen zeitliche Skalen größer als die Ionengyrationsperiode und zum anderen räumliche Skalen größer als der Ionengyrationsradius gemeint.

In der Magnetohydrodynamik werden die Komponenten des Plasmas (Ionen und Elektronen) als magnetisierte Flüssigkeit beschrieben. Die Dynamik dieses Systems wird mathematisch durch die sogenannten MHD-Gleichungen wiedergegeben, zu denen die Maxwellgleichungen, die Kontinuitäts-, Energie- und die Impulsgleichungen gehören. Da diese gekoppelten Gleichungen hochgradig nicht linear sind, ist eine analytische Lösung erschwert, in der Regel sogar unmöglich. Als Alternative bieten sich numerische Simulationen an, wie sie Vogt et al. (2004) und Zieger et al. (2004) speziell für paläomagnetosphärische Konfigurationen durchführen. Unterschiedliche physikalische Parameter sind in diesem Modell frei wählbar: auf der einen Seite das Magnetfeld der Erde, welches durch Orientierung und Stärke des Dipols, bzw. Quadrupols charakterisiert ist, auf der anderen Seite Parameter, die den Sonnenwind beschreiben, wie Dichte und Geschwindigkeit des Sonnenwindes sowie Richtung und Stärke des interplanetaren Magnetfeldes. Ausgehend von wohldefinierten Rand- und Anfangsbedingungen, kann man die oben erwähnten MHD-Gleichungen an allen Punkten eines vorgegebenen räumlichen Gitters numerisch lösen und damit in jedem dieser Punkte das magnetische und elektrische Feld sowie Teilchendichte und -geschwindigkeit bestimmen. Aus diesen Angaben lassen sich nun Aussagen über Feldverteilungen und

Stromsysteme gewinnen.

Der Vorteil von numerischen MHD-Simulationen ist, daß man komplexe Phänomene gut und realistisch beschreiben und untersuchen kann, denn im Gegensatz zu analytischen Lösungsmethoden muß man sich nicht auf Spezialfälle beschränken oder mit genäherten Gleichungen zufriedengeben.

Der Nachteil ist der hohe Zeitaufwand für die Berechnung, besonders dann, wenn man das Modell als Eingabe für weitere Berechnungen nutzen möchte, wie z. B. Bahnberechnung von Teilchen im Magnetfeld. Auch hat man bei den numerischen Simulationen die Feldwerte nicht an jedem beliebigen Ort zur Verfügung, sondern lediglich auf den Gitterpunkten, wobei die Auflösung dieses Gitters stark von der Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit des zur Verfügung stehenden Computers abhängt. So beträgt die Auflösung bei Zieger et al. (2004) nur etwa 0.5 Erdradien. Diese Auflösung reicht aus, wenn man Teilchenbahnen im Schweif berechnen will, wo die Feldgradienten nicht besonders groß sind. Anders ist es hingegen in erdnahen Gebieten, wo eine wesentlich höhere Auflösung notwendig ist.

Aufgrund dieser Vor- und Nachteile eignen sich die numerischen Simulationen sehr gut, um Felder und Stromsysteme in einer Paläomagnetosphäre zu untersuchen, aber nicht, um diese Ergebnisse als Eingabe für die Berechnungen von Teilchenbahnen zu benutzen.

### 2.6.2. Empirisches Magnetosphärenmodell

In empirischen Magnetosphärenmodellen wird das Magnetfeld mittels einer Parameterfunktion (z. B. eines Polynomansatzes) beschrieben, dessen Koeffizienten durch Anpassen des Modells an Satellitendaten gewonnen werden. Das innere Erdmagnetfeld wird bei der Modellierung durch einen gegenüber der Erdrotationsachse geneigten Dipol repräsentiert. Die meisten Modelle berücksichtigen auch verschiedene Stromsysteme, bestehend aus Ringstrom, Magnetopausen- und Schweifströmen. Die Form der Magnetopause wird nicht festvorgegeben, sondern ergibt sich empirisch.

Ein frühes Modell geht auf Mead und Fairfield (1975) zurück. Allerdings werden die Stromsysteme nicht einzeln modelliert, sondern durch  $\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$  nachträglich berechnet.

Eins der umfangreichsten und besten empirischen Modelle entwickelte Tsyganenko im Laufe der letzten Jahrzehnte. Tsyganenko und Usmanov (1982) setzen das magnetosphärische Magnetfeld aus den Beiträgen des Ringstromes, der Schweifströme und der Chapman-Ferraro-Ströme zusammen. Für den Beitrag des Ringstromes und der Schweifströme werden analytische Funktionen angesetzt, die sich als Rotation eines Vektorpotentials  $\underline{A}$  als  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$  schreiben lassen. Den magnetischen Beitrag der Chapman-Ferraro-Ströme modelliert man, wie schon bei Mead und Fairfield (1975), mittels eines Polynomansatzes, dessen Koeffizienten durch Satellitendaten bestimmt werden. Tsyganenko (1987; 1989) verbessert dieses Modell, indem er ein komplexeres Modell für die Schweifströme und den Ringstrom verwendet. Außerdem werden die Magnetopausenabmessungen nicht mehr explizit vorgegeben, sondern dynamisch

durch Daten angepaßt. Neue Satellitendaten ermöglichen eine Überarbeitung des Polynomansatz für die Chapman-Ferraro-Ströme. Später wurde die mathematische Beschreibung der einzelnen Teilsysteme von Grund auf erneuert (Tsyganenko, 2002), zusätzlich werden die Birkelandströme integriert.

Olson und Pfitzer (1977) beschreiben in ihrem ersten Modell das magnetosphärische Stromsystem, bestehend aus Ringstrom und Schweifströmen, die sich über die Chapman-Ferraro-Ströme schließen, mittels Leiterschleifen. Die Form der Magnetopause wird hierbei fest vorgegeben, nachdem sie z. B. durch Satellitendaten empirisch bestimmt oder über das Druckgleichgewicht auf der Magnetopause berechnet wurde. Das dynamische Magnetosphärenmodell von Olson und Pfitzer (1982) stellt eine Weiterentwicklung dieses Modells dar: Die Form und Größe der Magnetopause skalieren mit der Sonnenaktivität.

Die neueren empirischen Modelle (z. B. Tsyganenko, 2002) sind sehr mächtige Werkzeuge, wenn man die heutige Erdmagnetosphäre darstellen möchte, weil sie unter anderem auf Satellitenbeobachtungen des realen Magnetfeldes beruhen. Durch die Vorgabe verschiedener Parameter lassen sich sowohl ruhige, als auch gestörte Zeiten des Magnetfeldes in der Magnetosphäre beschreiben. Was als Vorteil dieser Modelle bei der Beschreibung der Erdmagnetosphäre gilt, erscheint dann als Nachteil, wenn man mittels dieser Modelle eine beliebige andere Magnetfeldkonfiguration, die sich wesentlich von der heutigen Erdmagnetosphäre unterscheidet, untersuchen möchte. Aus diesem Grund sind empirische Modelle den Zwecken dieser Arbeit nicht dienlich. Das Leiterschleifenmodell von Olson und Pfitzer (1977) bietet gute Möglichkeiten, um Parameterstudien zu betreiben, sofern die Stromsysteme in der Magnetopause bekannt sind. Doch gibt es bislang wenig Kenntnis über Stromsysteme in beliebigen Dipol- oder Quadrupolmagnetosphären. Auch rechentechnisch gesehen ist dieses Modell sehr aufwendig.

### 2.6.3. Potentialtheoretische Modell

In den sogenannten potentialtheoretischen Modellen werden alle Magnetfelder durch Potentiale beschrieben, so daß auf die Anpassung durch Satellitendaten verzichtet werden kann. Das innere Magnetfeld der Erde  $B_e$  wird durch einen Dipol im Zentrum der Erde beschrieben, der in seiner Richtung und Stärke variiert werden kann. Die Chapman-Ferraro-Ströme schirmen das innere Magnetfeld vom interplanetaren Magnetfeld ab, so daß im Falle einer abgeschlossenen Magnetosphäre die Normalkomponente des Magnetfeldes auf der Magnetopause verschwindet. Statt nun die Ströme zu modellieren und daraus das Magnetfeld zu berechnen, kann man ein zusätzliches Magnetfeld konstruieren, das die obige Bedingung einer geschlossenen Magnetopause erfüllt. Dieses zusätzliche Feld ist auch durch ein Potentialfeld darstellbar. Die Größe und Form der Magnetopause wird in den meisten Modellen fest vorgegeben.

Sowohl Alexeev (1978) als auch Stern (1985) setzen für ihr jeweiliges Magnetosphärenmodell eine parabolische Geometrie an. Der Brennpunkt des Paraboloid befindet sich zwischen der Erde und dem subsolaren Punkt. Die mathematische Beschreibung

ist auf Grund der parabolischen Geometrie recht kompliziert. Einen mathematisch einfacheren Ansatz bieten hingegen Willis et al. (2000). Sie verwenden in ihrem Modell eine sphärische Magnetosphäre, bei der die Erde im Zentrum der Magnetosphäre positioniert ist. Auch Romashchenko und Reshetnikov (2000) wählen eine sphärische Geometrie, aber die Erde befindet sich hierbei nicht im Zentrum, sondern ist zur sonnenzugewandten Seite verschoben. Voigt (1981) beschreibt die Magnetosphäre im Schweif durch einen Zylinder, der auf der sonnenzugewandten Seite durch eine Halbkugel abgeschlossen ist. Die Erde ist dabei innerhalb der Halbkugel positioniert.

Die hier angesprochenen potentialtheoretischen Modelle mit ihren frei wählbaren physikalischen Parametern bieten sich für die Zwecke dieser Arbeit an. Der Vorteil des parabolischen Modells ist seine Geometrie, denn diese beschreibt die Form der Magnetosphäre sehr gut. Nachteil hingegen ist die komplexe mathematische Beschreibung, die sich bei der Lösung der Laplacegleichung in parabolischen Koordinaten ergibt. Das Modell von Willis et al. (2000) bietet den Vorteil, daß nicht nur Dipolfelder als inneres Magnetfeld der Erde vorrausgesetzt werden können, sondern jedes beliebige Multipolfeld. Unrealistisch hingegen ist die sphärische Geometrie. Lediglich auf der Tagseite, also der sonnenzugewandten Seite, kann man dieses Modell für Untersuchung von Paläomagnetosphären verwenden. Das Modell von Voigt (1981) bietet einen guten Kompromiß zwischen realistischer Beschreibung der Magnetosphärengometrie und der Komplexität der mathematischen Beschreibung. Da in den Untersuchungen in dieser Arbeit sowohl das Modell von Willis et al. (2000) als auch von Voigt (1981) verwendet wird, werden sie in den folgenden beiden Abschnitten näher erläutert.

### 2.6.3.1. Sphärisches Magnetosphärenmodell nach Willis

Willis et al. (2000) verwenden in ihrem Modell eine sphärische Magnetopause. Das Magnetfeld innerhalb der Magnetosphäre setzt sich zusammen aus dem inneren Feld der Erde und einem äußeren Feld, das so beschaffen ist, daß die Normalkomponente des Gesamtfeldes auf der Magnetopause verschwindet.

Man verwendet hier keine selbstkonsistente Magnetopause, sondern gibt die Geometrie, wie sie in Abbildung 2.8 zu sehen ist, fest vor. Die Magnetopause, die die Magnetosphäre nach außen hin abgrenzt, wird durch eine konzentrische Kugel mit dem Radius  $R_m$  beschrieben. Die Erde mit dem Radius  $R_e < R_m$  befindet sich im Zentrum dieser Kugel.

Das Magnetfeld wird durch Multipole bis zu einem beliebigen Grad  $N$  beschrieben, die im Zentrum der Erde lokalisiert sind.

Auf Grund der kugelsymmetrischen Geometrie und der vereinfachten Annahme, daß sich das Magnetfeld lediglich aus dem oben erwähnten inneren Anteil und einem äußeren Anteil zusammensetzt, der die abschirmende Wirkung der Chapman-Ferraro-Ströme auf der Magnetopause beschreibt, aber alle weiteren Stromsysteme, wie Ringstrom und Schweifströme, unberücksichtigt läßt, kann man das magnetosphärische Magnetfeld leicht mathematisch umsetzen und auch schneller berechnen als im zylindrischen Modell von Voigt (1981). Interessant sind sphärische Magnetosphären dann,

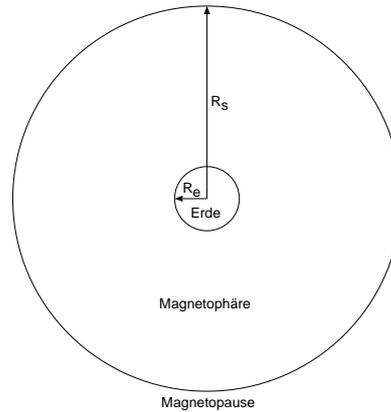


Abbildung 2.8.: Magnetosphärengeometrie nach Willis.

wenn man Effekte auf der Tagseite der Erde untersucht, ohne den Schweif und seine Geometrie zu berücksichtigen oder wenn man Bahnen hochenergetischer Teilchen berechnen möchte, die erst im erdnahen Feld, wo die Schweifgeometrie keine Rolle mehr spielt, abgelenkt werden. Aus diesem Grund wird das Modell hier näher beschrieben und eine kurze Herleitung, wie sie bei Willis et al. (2000) zu finden ist, gegeben. Betrachtet wird eine statische Magnetosphäre, innerhalb der keine Ströme fließen. In Kapitel 2.1 wurde bereits gezeigt, daß man unter diesen Annahmen das Magnetfeld mittels eines skalaren Potentials (siehe Gleichung 2.3) beschreiben kann. Unterteilt man das Magnetfeld in einen inneren Anteil  $\underline{B}_e$  und äußeren Anteil  $\underline{B}_m$ , so schreibt sich das Gesamtfeld als

$$\underline{B} = \underline{B}_e + \underline{B}_m = -\mu_0 \nabla(\Phi_e + \Phi_m). \quad (2.32)$$

Auf Grund der sphärischen Geometrie wird das innere Erdmagnetfeld durch eine Kugelfunktionsentwicklung der Form

$$\Phi_e = \frac{R_e}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos m\lambda + \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta) \quad (2.33)$$

angesetzt, wie bereits in Kapitel 2.1 mit Gleichung (2.10) eingeführt wurde.

Für das äußere Magnetfeld kann unter den oben erwähnten Bedingungen ebenfalls ein skalares Potential zur Beschreibung angesetzt werden, das sich in allgemeiner Form schreiben läßt als

$$\Phi_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_n^m r^n \cos m\lambda + B_n^m r^n \sin m\lambda] P_n^m(\cos \vartheta). \quad (2.34)$$

Um die Koeffizienten  $A_n^m$  und  $B_n^m$  zu bestimmen, nutzt man die Randbedingungen für eine ideal leitende und abgeschlossene Magnetopause aus. Diese besagt, daß keine

## 2. Das Magnetfeld der Erde

---

Feldlinien durch die Magnetopause dringen können. Somit muß die Normalkomponente des Gesamtfeldes an dieser Stelle, also bei  $r = R_m$ , verschwinden.

$$\begin{aligned}
 B_r &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_e + \Phi_m) \Big|_{r=R_m} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \left[ \frac{n+1}{\mu_0} \left( \frac{R_e}{R_m} \right)^{n+2} g_n^m - n A_n^m R_m^{n-1} \right] \cos m\lambda \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{n+1}{\mu_0} \left( \frac{R_e}{R_m} \right)^{n+2} h_n^m - n B_n^m R_m^{n-1} \right] \sin m\lambda \right\} P_n^m(\cos \vartheta) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

Da die Normalkomponente  $B_r$  für alle  $\vartheta$ - und  $\lambda$ -Werte verschwinden soll, müssen die beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern gleich Null sein. Somit ergibt sich für die Koeffizienten  $A_n^m$  und  $B_n^m$  zu

$$A_n^m = \frac{1}{\mu_0} \frac{n+1}{n} \frac{R_e^{n+2}}{R_m^{2n+1}} g_n^m \quad \text{und} \quad B_n^m = \frac{1}{\mu_0} \frac{n+1}{n} \frac{R_e^{n+2}}{R_m^{2n+1}} h_n^m. \quad (2.36)$$

Setzt man diese nun in die Ausgangsgleichung (2.34) ein, so ergibt sich für das skalare Potential

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{R_e}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ 1 + \frac{n+1}{n} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{2n+1} \right] \left( \frac{R_e}{r} \right)^{n+1} \\
 &\quad \cdot (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

bzw. unter Verwendung der in den Gleichungen 2.11 eingeführten Koeffizienten  $c_n^m$  und  $\lambda_n^m$

$$\Phi = \frac{R_e}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ 1 + \frac{n+1}{n} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{2n+1} \right] \left( \frac{R_e}{r} \right)^{n+1} c_n^m \cos m(\lambda - \lambda_n^m) P_n^m. \quad (2.38)$$

Hierbei ist  $P_n^m = P_n^m(\cos \vartheta)$ . Die Magnetfeldkomponenten berechnen sich dann über  $\underline{B} = -\mu_0 \nabla \Phi$  wie folgt, wobei  $R_e < r < R_s$  gilt:

$$B_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_n^m (n+1) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_m} \right)^{2n+1} \right] \left( \frac{R_e}{r} \right)^{n+2} \cos m(\lambda - \lambda_n^m) P_n^m, \quad (2.39a)$$

$$B_{\vartheta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_n^m \left[ 1 + \frac{n+1}{n} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{2n+1} \right] \left( \frac{R_e}{r} \right)^{n+2} \cos m(\lambda - \lambda_n^m) \frac{dP_n^m}{d\vartheta}, \quad (2.39b)$$

$$B_{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n m c_n^m \left[ 1 + \frac{n+1}{n} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{2n+1} \right] \left( \frac{R_e}{r} \right)^{n+2} \sin m(\lambda - \lambda_n^m) \frac{P_n^m}{\sin \vartheta}. \quad (2.39c)$$

### 2.6.3.2. Zylindrisches Magnetosphärenmodell nach Voigt

Auch Voigt (1981) bietet mit seinem Modell einer zylindrischen Magnetosphäre einen mathematisch einfacheren Ansatz als die parabolischen Modelle von Alexeev (1978) oder Stern (1985), aber eine komplexere und realistischere Beschreibung als Willis et al. (2000). Dargestellt wird seine Magnetosphäre durch einen Zylinder auf der Nachtseite, der auf der Tagseite durch eine Halbkugel abgeschlossen ist. Die Magnetopause wird als nicht selbstkonsistent, sondern fest vorgegeben angenommen. Die Erde befindet sich innerhalb der Halbkugel.

Das Magnetfeld in der Magnetosphäre setzt sich zusammen aus einem inneren und äußeren Magnetfeld. Der innere Anteil, auch Hauptfeld genannt, läßt sich durch einen Dipol im Zentrum der Erde beschreiben. Der äußere Anteil hingegen wird durch verschiedene Ströme hervorgerufen. Der Erde am nächsten befindet sich der äquatoriale Ringstrom. In erster Näherung kann das Magnetfeld des Ringstromes im Außenraum durch ein Dipolfeld beschrieben werden, und es bedarf somit nicht einer gesonderten Modellierung. Auf der Magnetopause fließen die Chapman-Ferraro-Ströme, die das Erdmagnetfeld nach außen hin abschirmen. Statt die Magnetopausenströme zu modellieren und daraus das Magnetfeld zu bestimmen, wird lediglich der Effekt der Ströme betrachtet und versucht, diesen zu beschreiben. Dies geschieht ebenso wie bei dem sphärischen Modell von Willis, indem ein zweites Magnetfeld so konstruiert wird, daß keine Magnetfeldlinien durch die Magnetopause dringen. Anstatt die Schweifströme durch ein komplexes Stromsystem zu beschreiben und daraus das Magnetfeld zu bestimmen, werden die Feldlinien nur entsprechend in Richtung des Schweifes gestreckt. In der sogenannten offenen Magnetosphäre kommen noch Einflüsse des interplanetaren Magnetfeldes hinzu.

Mehrere voneinander unabhängige physikalische Parameter lassen sich in diesem Modell variieren. Das innere Magnetfeld wird durch einen Dipol im Zentrum der Erde bestimmt, dessen Stärke und Neigungswinkel gegenüber der Rotationsachse der Erde frei wählbar sind. Da keine selbstkonsistente Magnetopause angesetzt wird, muß die Geometrie der Magnetosphäre mittels der Standoffdistanz, also dem Abstand der Erde zum subsolaren Punkt, und dem Radius des Schweifes bei ungefähr zehn Erdradien vorgegeben werden. Die Beschaffenheit des Schweifes kann mittels eines sogenannten Streckparameters variiert werden zwischen dem Vakuumfall ohne Plasma und dem Fall einer Harris-Schicht. Dieser Parameter bestimmt, wie stark die Magnetfeldlinien im Schweif gestreckt werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Magnetopause durchlässig zu machen, d. h. ein bestimmter Anteil der Feldlinien kann von einer Seite der Magnetopause auf die andere dringen. Die jeweilige Durchdringrate und auch Richtung und Stärke des interplanetaren Magnetfeldes können gewählt werden.

Da die zylindrische Form dieses Magnetosphärenmodells eine plausible Näherung an die wirkliche Form einer Magnetosphäre ist und sich zudem die physikalischen Modellparameter unabhängig voneinander einstellen lassen, soll in Kapitel 3 das Modell zum einen näher beschrieben und zum anderen für parametrische Studien erweitert werden. Ein weiterer Vorteil dieses Modells ist, daß es sich einer recht unkomplizier-

ten mathematischen Beschreibung bedient, die sich auch rechentechnisch schnell umsetzen läßt. Somit kann man innerhalb kurzer Zeit das Magnetfeld an vielen verschiedenen Orten bestimmen, was z. B. bei der Berechnung von Teilchenbahnen notwendig ist. Kapitel 4 und 5 zeigen einige Anwendungen dieses Modells, wie z. B. Feldlinien verschiedener Magnetfeldkonfigurationen oder Teilchenbahnen.

Das Voigtsche Modelle wurde nicht nur erfolgreich für die Erdmagnetosphäre verwendet (Voigt, 1981; Hilmer und Voigt, 1995), sondern auch zur Beschreibung der magnetosphärischen Magnetfelder anderer Planeten, wie Merkur (Grosser et al., 2004), Neptun (Voigt und Ness, 1990) und Uranus (Voigt et al., 1987).

## 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

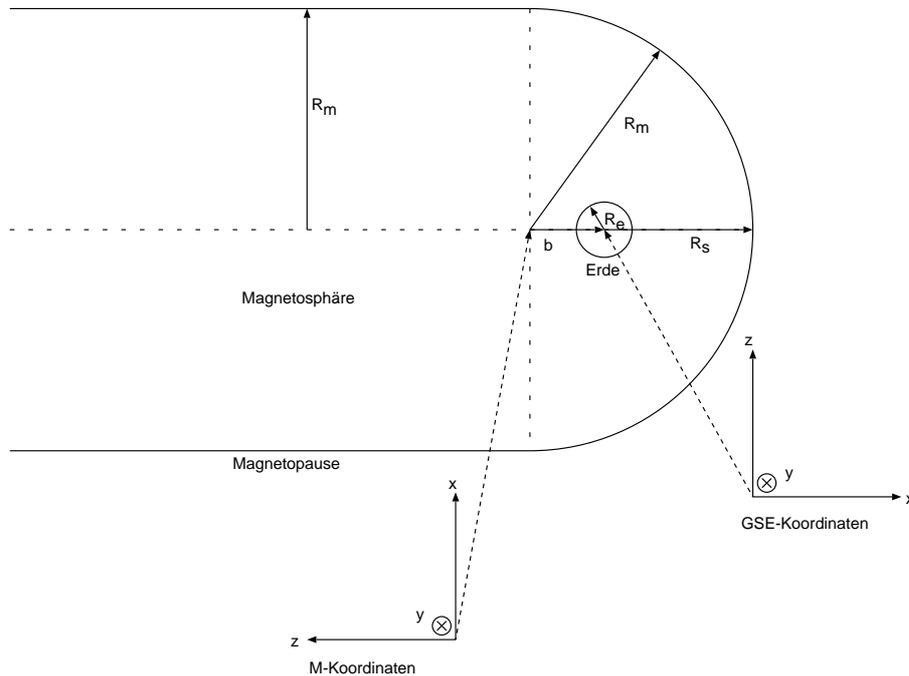
Im vorangegangenen Kapitel wurden verschiedene Magnetosphärenmodelle vorgestellt und es wurde diskutiert, inwiefern sie sich für parametrische Studien eignen. Als potentialtheoretisches Modell bietet das Modell von Voigt (1981) die Möglichkeit, auch Magnetfeldkonfigurationen zu untersuchen, die deutlich von der heutigen Situation abweichen. Denn die Parameter, die die Geometrie der Magnetosphäre und das innere Erdmagnetfeld bestimmen, sind frei wählbar. Auch läßt sich das Modell rechnerisch einfach umsetzen. Um mehr Möglichkeiten zur Modellierung des inneren Erdfeldes zu haben, soll das Voigtsche Modell, das lediglich einen Dipolanteil berücksichtigt, um einen Quadrupolterm erweitert werden. Die Modellierungsidee und die meisten Ansätze sind aus Voigt (1981) übernommen.

### 3.1. Koordinatensystem und Geometrie der Modellmagnetosphäre

Die Geometrie der Magnetopause wird in diesem potentialtheoretischen Modell fest vorgegeben, so wie in Abbildung 3.1 zu sehen ist. Die Form der Magnetosphäre wird auf der Nachtseite durch einen halbinendlichen Zylinder mit dem Radius  $R_m$  dargestellt, der auf der Tagseite durch eine Halbkugel mit demselben Radius  $R_m$  abgeschlossen wird.

Die Erde mit dem Radius  $R_e$  ist innerhalb der Halbkugel lokalisiert, d. h. die Standoffdistanz  $R_s$  ist kleiner als  $R_m$ . Zur mathematischen Beschreibung wird ein weiterer Abstand  $b$  eingeführt mit  $b = R_m - R_s$ , der die Strecke von der Erde zum Mittelpunkt der Halbkugel wiedergibt.

Zur Herleitung und Berechnung des Magnetfeldes innerhalb der Magnetosphäre werden zwei verschiedene Koordinatensysteme verwendet, die beide in Abbildung 3.1 dargestellt sind. Im GSE-System (Geocentric Solar Ecliptic) befindet sich die Erde im Ursprung des Koordinatensystem. Die  $x$ -Achse zeigt in Richtung Sonne. Die Ekliptik der Erde wird durch die  $x$ - und  $y$ -Achse aufgespannt. Die  $z$ -Achse ist dann senkrecht zu den anderen beiden Achsen. Auf Grund der zweigeteilten Geometrie der Magnetosphäre in Halbkugel und Zylinder wird das Modellierungskoordinatensystem, kurz M-System genannt, eingeführt. In diesem befindet sich der Mittelpunkt der Halbkugel im Ursprung des Koordinatensystems und zwar genau im Zentrum der Schnittfläche



**Abbildung 3.1.:** Magnetosphärengeometrie nach Voigt.

zwischen Halbkugel und Zylinder. Die  $z$ -Achse zeigt in Schweifrichtung. Die Ekliptik wird in diesem Fall durch die  $z$ - und  $y$ -Achse aufgespannt. Die  $x$ -Achse steht senkrecht zu anderen beiden Achsen. Damit beschreibt  $z < 0$  die Kugel und  $z > 0$  den Zylinder. Durch diese Wahl des Koordinatensystems beschränken sich beide geometrische Figuren auf jeweils einen Halbraum, was viele Rechnungen vereinfacht.

Die Transformation zwischen den beiden Koordinatensystemen ist gegeben durch:

$$x_{gse} = -(z + b), \quad y_{gse} = y, \quad z_{gse} = x, \quad (3.1)$$

wobei die mit „gse“ indizierten Größen die Koordinaten im GSE-System und die nicht indizierten die Koordinaten im M-System sind.

Des weiteren werden sphärische Koordinaten auf der Tagseite, d. h. in der Halbkugel, und Zylinderkoordinaten auf der Schweifseite im Zylinder verwendet. Die Transformation zwischen den kartesischen, sphärischen und zylindrischen Koordinaten sind in Anhang A.1 zu finden.

## 3.2. Modellannahmen und Modellierungsstrategie

Da sich das Magnetfeld nicht in allen Einzelheiten analytisch beschreiben läßt, müssen Annahmen und Näherungen gemacht werden.

Das Magnetfeld in der Magnetosphäre setzt sich bei Voigt (1981) aus verschiedenen Anteilen zusammen:

- dem Hauptfeld  $\underline{B}_e$  der Erde,
- dem Feld  $\underline{B}_{rc}$  des äquatorialen Ringstromes,
- den Felder  $\underline{B}_{cfi}$  und  $\underline{B}_{cfa}$  der Chapman-Ferraro-Ströme,
- dem Feld  $\underline{B}_j$  der Schweifströme und
- den Einflüssen  $\underline{B}_{imf}$  des interplanetaren Magnetfeldes (IMF).

Für das Hauptfeld  $\underline{B}_e$  der Erde wird eine Multipolentwicklung angesetzt. Voigt (1981) beschränkt sich dabei auf einen Dipol. In dieser Arbeit setzt sich das Erdfeld aus Dipol und Quadrupol zusammen; ein Ansatz für die Hinzunahme von weiteren Multipoltermen wird in Abschnitt 3.10 gegeben. Sowohl Dipol als auch Quadrupol befinden sich im Zentrum der Erde und sind in Stärke und Richtung frei wählbar.

Den Ringstrom kann man in erster Näherung im Fernfeld als Dipol modellieren. Nach dem Biot-Savart-Gesetz läßt sich das Magnetfeld  $B_{rc}$  einer Leiterschleife mit dem Radius  $a$  oder eines Ringstromes im Abstand  $r$  in der Ebene der Leiterschleife darstellen durch

$$B_{rc} = -\frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3} = -\frac{\mu_0 2\pi I a^2}{4\pi r^3} =: -\frac{\mu_0 m_{rc}}{4\pi r^3}. \quad (3.2)$$

Hierbei ist  $I$  die Stromstärke. Außerhalb des Ringstromes entspricht dieses Magnetfeld genau dem Feld in der Äquatorebene eines magnetischen Dipolmoments  $m_{rc} = 2\pi I a^2$ . Um nicht das Haupt- und das Ringstromfeld mit zwei Termen in die Rechnung einzulassen, arbeitet man stattdessen mit einem modifizierten Dipolmoment  $m + m_{rc}$  für das Hauptfeld, so daß  $B_{rc}$  nicht als eigener Term auftritt (Voigt, 1981; Stern, 1985). Durch die Chapman-Ferraro-Ströme wird das Magnetfeld innerhalb der Magnetosphäre, das sich aus dem Hauptfeld der Erde  $\underline{B}_e$  und dem Feld der Schweifströme  $\underline{B}_j$  zusammensetzt, vom interplanetaren Magnetfeld  $\underline{B}_{imf}$  außerhalb der Magnetosphäre getrennt. Das von den Chapman-Ferraro-Strömen erzeugte Magnetfeld wird zum einen durch das Feld  $\underline{B}_{cfi}$  innerhalb der Magnetosphäre und zum anderen durch das Feld  $\underline{B}_{cfa}$  außerhalb der Magnetosphäre beschrieben. Bei einer geschlossenen Magnetosphäre dringen keine Magnetfeldlinien durch die Magnetopause hindurch. Mathematisch bedeutet dies, daß die Normalkomponente des Magnetfeldes auf der Magnetosphäre verschwinden muß. Dabei schirmt  $B_{cfi}$  das innere Magnetfeld und  $B_{cfa}$  das interplanetare Magnetfeld ab, so daß beide nicht durch die Magnetopause dringen können. Beide Magnetfelder  $B_{cfi}$  und  $B_{cfa}$  lassen sich als Potentialfelder darstellen.

Bei Voigt (1981) wird das Magnetfeld  $\underline{B}_j$  der Schweifströme auf der Nachtseite, d. h. im Zylinder nicht durch ein komplexes Stromsystem beschrieben, sondern es wird versucht, den Effekt, den diese Ströme hervorrufen, zu modellieren. Dies geschieht, indem man die Magnetfeldlinien auf der Nachtseite in Richtung des Schweifes streckt.

### 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

---

Bei einer ideal abgeschlossenen Magnetosphäre treten keine Magnetfeldlinien durch die Magnetopause hindurch. Ist sie hingegen nicht abgeschlossen, so dringt ein bestimmter Anteil  $c_i$  des inneren Magnetosphärenfeldes nach außen und ebenso ein bestimmter Anteil  $c_a$  des interplanetaren Magnetfeldes nach innen durch die Magnetopause hindurch. Dies ist eine sehr vereinfachte Betrachtungsweise, um die Rekonnexion von Feldlinien zu modellieren. Zunächst wird das Magnetfeld einer geschlossenen Magnetosphäre berechnet. Durch unterschiedliche Gewichtung der einzelnen Felder innerhalb und außerhalb der Magnetosphäre läßt sich dann eine offene Magnetosphäre darstellen.

Zusammengefaßt ergibt sich für das Magnetfeld  $\underline{B}_{in}$  innerhalb der Magnetosphäre und  $\underline{B}_{ex}$  außerhalb der Magnetosphäre (Voigt, 1981):

$$\underline{B}_{in} = \underline{B}_e + \underline{B}_j + (1 - c_i) \underline{B}_{cfi} + c_a \underline{B}_{imf}, \quad (3.3a)$$

$$\underline{B}_{ex} = \underline{B}_{imf} + (1 - c_a) \underline{B}_{cfa} + c_i (\underline{B}_e + \underline{B}_j). \quad (3.3b)$$

Die Strategie der Modellierung ist folgende: Es werden nur statische Prozesse betrachtet. Dabei sollen innerhalb des Modellierungsgebietes keine Ströme fließen. Das heißt also, daß alle Magnetfelder sich aus skalaren Potentialen herleiten lassen. Gesucht wird, wie bereits in Abschnitt 2.1 gezeigt, eine Lösung der Laplacegleichung  $\nabla^2 \underline{B} = 0$ , diesmal allerdings in einer sphärisch-zylindrischen Geometrie und unter Berücksichtigung einiger Randbedingungen. Die zweigeteilte Geometrie der Magnetosphäre bedingt, daß die Lösungen für das Magnetfeld in der Halbkugel und dem Zylinder getrennt berechnet werden. Folgende Randbedingungen müssen beachtet werden:

- Mit Ausnahme des Erdmittelpunktes müssen die Felder überall endlich sein und sollen mit zunehmender Entfernung von der Erde kleiner werden, so daß sie im Unendlichen verschwinden:

$$\underline{B}(r_{gse} > 0) < \infty, \quad (3.4)$$

$$\underline{B}(r_{gse} \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.5)$$

Letztere Bedingung ist nur für den offenen Schweif relevant, weil in alle anderen Richtungen der Betrachtungsraum durch die Magnetopause begrenzt und damit endlich ist.

- Das Magnetfeld soll für eine geschlossene Magnetosphäre berechnet werden, so daß auf der Magnetopause keine Normalkomponente des Gesamtmagnetfeldes existiert:

$$\hat{n} \cdot (\underline{B}_{cfi} + \underline{B}_e + \underline{B}_j) = 0 \quad \text{innerhalb der Magnetosphäre,} \quad (3.6a)$$

$$\hat{n} \cdot (\underline{B}_{cfa} + \underline{B}_{imf}) = 0 \quad \text{außerhalb der Magnetosphäre.} \quad (3.6b)$$

- Da die Berechnung des Magnetfeldes in Halbkugel und Zylinder getrennt erfolgt, muß an der Schnittebene zwischen beiden geometrischen Körpern, also bei  $z = 0$ , das Magnetfeld stetig ein:

$$\underline{B}_{Halbkugel}(z = 0) = \underline{B}_{Zylinder}(z = 0). \quad (3.7)$$

Der Lösungsansatz für die Laplacegleichung kann über das Separationsverfahren gefunden werden. Die Laplacegleichung ist entweder in zylindrischen oder in sphärischen Koordinaten separierbar, nicht aber in beiden Koordinatensystemen gleichzeitig. Daraus ergibt sich, daß die  $z$ -Komponente des Feldes in  $M$ -Koordinaten nicht stetig ist. Als abgeschwächte Randbedingung wird deshalb zunächst gefordert, daß an der Schnittebene zwischen Halbkugel und Zylinder das skalare Potential statt des Magnetfeldes stetig sein muß.

$$u_{Halbkugel}(z = 0) = u_{Zylinder}(z = 0) \quad (3.8)$$

Hieraus ergibt sich automatisch auch die Stetigkeit der  $x$ - und  $y$ -Komponenten des Feldes. Um auch eine Stetigkeit der  $z$ -Komponente zu erhalten, wird ein iterativer Prozeß verwendet, der sämtliche Entwicklungskoeffizienten „verbessert“.

Vorgegeben wird das innere Magnetfeld  $\underline{B}_e$  der Erde (Abschnitt 3.3) und das interplanetare Magnetfeld  $\underline{B}_{imp}$ . Als erstes wird das Magnetfeld innerhalb und außerhalb der Halbkugel berechnet. Die abschirmenden Magnetfelder  $\underline{B}_{cfl}$  und  $\underline{B}_{cfa}$  der Chapman-Ferraro-Ströme werden über ein skalares Potential angesetzt, welches durch eine Kugelfunktionsentwicklung ausgedrückt werden kann. Um die Koeffizienten dieser Entwicklungen zu bestimmen, werden die Randbedingungen aus den Gleichungen (3.6a) und (3.6b) ausgenutzt (siehe Abschnitt 3.4). Zweiter Schritt ist dann die Berechnung des Magnetfeldes im Zylinder. Auf Grund der dortigen Geometrie wird ein Besselfunktionsansatz gewählt, der die Randbedingungen einer geschlossenen Magnetosphäre bereits erfüllt. Um nun die Koeffizienten dieses Ansatzes zu bestimmen, wird die Stetigkeit des Potentials an der Schnittebene bei  $z = 0$  verwendet (Abschnitt 3.5). Als letztes werden die Koeffizienten optimiert, damit auch die Stetigkeit des Magnetfeldes gewährleistet ist (Abschnitt 3.8).

### 3.3. Inneres Magnetfeld der Erde

Nach den Überlegungen der Abschnitte 2.1 und 3.2 läßt sich das innere Magnetfeld  $\underline{B}_e$  der Erde durch den Gradienten eines skalaren Potentials  $u_e$  darstellen:

$$\underline{B}_e = -\mu_0 \nabla u_e \quad \text{mit} \quad \nabla^2 u_e = 0. \quad (3.9)$$

In dieser Arbeit wird als Ansatz für das Potential  $u_e$  der Erde eine Überlagerung eines Dipolpotentials  $u_d$  und eines Quadrupolpotentials  $u_q$  verwendet, wie sie bereits in

Kapitel 2.1 eingeführt wurden:

$$u_d = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{m} \cdot \underline{r}_{gse}}{r_{gse}^3} \quad \text{und} \quad u_q = \frac{1}{8\pi} \frac{\underline{r}_{gse}^T \underline{Q} \underline{r}_{gse}}{r_{gse}^5}. \quad (3.10)$$

Da sämtliche Berechnungen im M-Koordinatensystem durchgeführt werden, müssen die in Gleichung (3.10) angeführten Potentiale von GSE- in M-Koordinaten transformiert werden. Hierbei werden aber nur die Ortsvektoren  $\underline{r}_{gse}$  transformiert, nicht aber die Multipolmomente  $\underline{m}$  und  $\underline{Q}$ . Diese werden in der gesamten Arbeit stets in GSE-Koordinaten verwendet, obwohl sie keinen entsprechenden Index tragen.

### Dipolmoment

Dipolpotential in kartesischen GSE-Koordinaten:

$$u_d = \frac{\underline{m} \cdot \underline{r}_{gse}}{4\pi r_{gse}^3} = \frac{m_x x_{gse} + m_y y_{gse} + m_z z_{gse}}{4\pi (x_{gse}^2 + y_{gse}^2 + z_{gse}^2)^{3/2}} \quad (3.11)$$

Umrechnung in M-Koordinaten mittels Gleichung (3.1):

$$u_d = \frac{-m_x(z+b) + m_y y + m_z x}{4\pi [(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{3/2}} \quad (3.12)$$

### Quadrupolmoment

Quadrupolpotential in kartesischen GSE-Koordinaten ( $\underline{Q}$  ist symmetrisch und es gilt  $\text{Spur}(\underline{Q})=0$ ):

$$u_q = \frac{\underline{r}_{gse}^T \underline{Q} \underline{r}_{gse}}{8\pi r_{gse}^5} = \frac{Q_{xx} x_{gse}^2 + Q_{yy} y_{gse}^2 - (Q_{xx} + Q_{yy}) z_{gse}^2}{8\pi (x_{gse}^2 + y_{gse}^2 + z_{gse}^2)^{5/2}} + \frac{2Q_{xy} x_{gse} y_{gse} + 2Q_{xz} x_{gse} z_{gse} + 2Q_{yz} y_{gse} z_{gse}}{8\pi (x_{gse}^2 + y_{gse}^2 + z_{gse}^2)^{5/2}} \quad (3.13)$$

Umrechnung in M-Koordinaten mittels Gleichung (3.1):

$$u_q = \frac{Q_{xx}(z+b)^2 + Q_{yy} y^2 - (Q_{xx} + Q_{yy}) x^2}{8\pi [(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{5/2}} - \frac{2Q_{xy}(z+b)y - 2Q_{xz}(z+b)x + 2Q_{yz}yx}{8\pi [(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{5/2}} \quad (3.14)$$

Für das Gesamtpotential  $u_e$  und das Magnetfeld  $\underline{B}_e$  ergeben sich dann in kartesischen

Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 u_e = & \frac{-m_x(z+b) + m_y y + m_z x}{4\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{3/2}} \\
 & + \frac{Q_{xx}(z+b)^2 + Q_{yy}y^2 - (Q_{xx} + Q_{yy})x^2}{8\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{5/2}} \\
 & + \frac{-2Q_{xy}(z+b)y - 2Q_{xz}(z+b)x + 2Q_{yz}yx}{8\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{5/2}}. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

**Inneres Erdmagnetfeld:**  $\underline{B}_e = -\mu_0 \nabla u_e = -\mu_0 \nabla(u_d + u_q)$

$$\begin{aligned}
 B_{e,x} = & -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m_z}{r^3} - \frac{3xa_d}{r^5} \right. \\
 & \left. - \frac{(Q_{xx} + Q_{yy})x + Q_{xz}(z+b) - Q_{yz}y}{r^5} - \frac{5xa_q}{2r^7} \right) \quad (3.16a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{e,y} = & -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m_y}{r^3} - \frac{3ya_d}{r^5} \right. \\
 & \left. + \frac{Q_{yy}y - Q_{xy}(z+b) + Q_{yz}x}{r^5} - \frac{5ya_q}{2r^7} \right) \quad (3.16b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{e,z} = & -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{-m_x}{r^3} - \frac{3(z+b)a_d}{r^5} \right. \\
 & \left. + \frac{Q_{xx}(z+b) - Q_{xy}y - Q_{xz}x}{r^5} - \frac{5(z+b)a_q}{2r^7} \right) \quad (3.16c)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } r = \sqrt{(z+b)^2 + y^2 + x^2},$$

$$a_d = -m_x(z+b) + m_y y + m_z x,$$

$$\begin{aligned}
 a_q = & Q_{xx}(z+b)^2 + Q_{yy}y^2 - (Q_{xx} + Q_{yy})x^2 \\
 & - 2Q_{xy}(z+b)y - 2Q_{xz}(z+b)x + 2Q_{yz}xy
 \end{aligned}$$

### 3.4. Magnetfeld in der Halbkugel

Um das Magnetfeld in der Halbkugel zu berechnen, werden sphärische Koordinaten verwendet, wie sie in Abschnitt 3.1 und A.1 eingeführt worden sind.

Das Magnetfeld in der Halbkugel besteht aus dem inneren Feld  $\underline{B}_e$  der Erde, das bereits im vorangegangenen Abschnitt 3.3 berechnet wurde, und dem Feld  $\underline{B}_{cfi}$  der Chapman-Ferraro-Ströme. Das Magnetfeld  $\underline{B}_j$  der Schweifströme wird zunächst weggelassen und erst in Abschnitt 3.6 hinzugenommen.

### 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

---

Da die Chapman-Ferraro-Ströme an sich in diesem Magnetosphärenmodell nicht weiter von Interesse sind, soll lediglich das Magnetfeld, das diese Ströme erzeugen, modelliert werden. Die Idee dieser Modellierung ist folgende: Auf der festvorgegebenen Magnetopause wird die Verteilung der Normalkomponente des inneren Feldes  $\underline{B}_e$  berechnet. Um die Randbedingung (3.6a) zu erfüllen, wird ein zusätzliches Magnetfeld, nämlich das Feld der Chapman-Ferraro-Ströme  $\underline{B}_{cfi}$ , eingeführt, das so konstruiert ist, daß die Normalkomponente des gesamten Magnetfeldes  $\underline{B} = \underline{B}_e + \underline{B}_{cfi}$  auf der Magnetopause verschwindet.

Da die Magnetopause als infinitesimal dünn angesehen wird und die Chapman-Ferraro-Ströme nur dort lokalisiert sind, während außerhalb dieser Schicht keine Ströme fließen sollen, kann das aus den Strömen resultierende Magnetfeld mittels eines skalaren Potentials dargestellt werden.

Aufgrund der sphärischen Geometrie der Magnetopause auf der Tagseite wählt man für das Potential des Magnetfeldes, das durch die Chapman-Ferraroströme erzeugt wird, eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen, bei der die Quellen des Feldes außerhalb einer Kugel mit dem Radius  $R_m$  liegen (Voigt, 1981):

$$u_{cfi} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} \frac{r^n}{R_m^{n-1}} (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^k(\cos \vartheta), \quad \text{für } r < R_m. \quad (3.17)$$

Das Potential wird so angesetzt, daß die Koeffizienten  $a_n^k$  und  $b_n^k$  die Einheit nT haben. Um diese Koeffizienten zu bestimmen, verwendet man die Randbedingungen (3.6a), die besagen, daß auf der Magnetopause bei  $r = R_m$  die Normalkomponente des Feldes verschwinden muß. In sphärischer Geometrie entspricht die Normalkomponente  $\hat{n} \cdot \underline{B}$  der radialen Komponente  $B_r$ . Demnach ist:

$$\hat{n} \cdot (\underline{B}_e + \underline{B}_{cfi}) = B_{e,r} + B_{cfi,r} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{e,r} = -B_{cfi,r} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} u_{cfi}. \quad (3.18)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung erhält man aus der Ableitung des Ansatzes (3.17) nach der Radialkomponente  $r$ :

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} u_{cfi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{n} \frac{r^{n-1}}{R_m^{n-1}} \Big|_{r=R_m} (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^m(\cos \vartheta), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^m(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Um die linke Seite der Randbedingung (3.18) zu berechnen, wird das Potential  $u_e$  des inneren Magnetfeldes der Erde in kartesische Koordinaten umgewandelt, um daraus die Radialkomponente des Magnetfeldes zu bestimmen. Ausgangspunkt ist also das Potential in Gleichung (3.15), das mittels der Transformation (A.1) in sphärische Koordinaten überführt wird. Die anschließenden Umformungen werden unter Ausnutzung der erzeugenden Funktion gemacht. Die Transformation wird für Dipol und Quadrupol getrennt durchgeführt.

Das Potential  $u_d$  für den Dipol ergibt sich somit aus Gleichung (3.12):

$$\begin{aligned}
 u_d &\stackrel{(3.12)}{=} \frac{-m_x(z+b) + m_y y + m_z x}{4\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{3/2}} \\
 &\stackrel{(A.1)}{=} \frac{-m_x(r \cos \vartheta + b) + m_y r \sin \vartheta \sin \lambda + m_z r \sin \vartheta \cos \lambda}{4\pi[(r \cos \vartheta + b)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \lambda + r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \lambda]^{3/2}} \\
 &= -\frac{m_x}{4\pi r^2} \frac{(\frac{b}{r} + \cos \vartheta)}{[1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{3/2}} \\
 &\quad + \frac{(m_y \sin \lambda + m_z \cos \lambda)}{4\pi r^2} \frac{\sin \vartheta}{[1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{3/2}} \\
 &\stackrel{(*)}{=} -\frac{m_x}{4\pi r^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-1} P_n^0(\cos \vartheta) \\
 &\quad + \frac{(m_y \sin \lambda + m_z \cos \lambda)}{4\pi r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-1} P_n^1(\cos \vartheta) \\
 &= \frac{1}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n+1} [-m_x n P_n^0(\cos \vartheta) + (m_y \sin \lambda + m_z \cos \lambda) P_n^1(\cos \vartheta)] \\
 &=: \frac{1}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n+1} [-n f_1 P_n^0(\cos \vartheta) + f_2 P_n^1(\cos \vartheta)], \quad r > b. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Bei der mit (\*) gekennzeichneten Umformung wurden die Ableitungen der erzeugenden Funktion (A.25) und (A.26) verwendet. Siehe hierzu im Anhang den Abschnitt A.2.2. Man beachte, daß es sich hierbei um unnormierte Kugelfunktionen  $P_n^m$  handelt und nicht wie in der Geophysik üblich um Kugelfunktionen in der Schmidt'schen Normierung. Begründet ist diese Wahl der Normierung in den verwendeten Ableitungen der erzeugenden Funktionen, die sich nur für unnormierte Kugelfunktionen ohne zusätzliche Faktoren in der angegebenen Form schreiben lassen. Gleiches gilt für die Kugelfunktionen, die bei der nachfolgenden Beschreibung des Quadrupolpotentials auftreten.

Das Potential  $u_e$  in sphärischen Koordinaten, wie es in Gleichung (3.20) berechnet wurde, ist nur gültig für  $r > b$ . Grund hierfür ist der mit (\*) gekennzeichnete Umformungsschritt, der sich nur durchführen läßt, wenn  $\frac{b}{r} < 1$ . Hierbei sei auf die Definition der erzeugenden Funktion in Gleichung (A.24) verwiesen.

### 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

Für die Umrechnungen des Potential  $u_q$  für den Quadrupol geht man von der Gleichung (3.14) aus:

$$\begin{aligned}
u_q &\stackrel{(3.14)}{=} \frac{Q_{xx}(z+b)^2 + Q_{yy}y^2 - (Q_{xx} + Q_{yy})x^2}{8\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{5/2}} \\
&\quad + \frac{-2Q_{xy}(z+b)y - 2Q_{xz}(z+b)x + 2Q_{yz}yx}{8\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{5/2}} \\
&\stackrel{(A.1)}{=} \frac{Q_{xx}(r \cos \vartheta + b)^2 + Q_{yy}r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \lambda - (Q_{xx} + Q_{yy})r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \lambda}{8\pi r^5 [1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{5/2}} \\
&\quad + \frac{-2Q_{xy}(r \cos \vartheta + b)r \sin \vartheta \sin \lambda - 2Q_{xz}(r \cos \vartheta + b)r \sin \vartheta \cos \lambda}{8\pi r^5 [1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{5/2}} \\
&\quad + \frac{2Q_{yz}r^2 \sin^2 \vartheta \cos \lambda \sin \lambda}{8\pi r^5 [1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{5/2}} \\
&= \frac{Q_{xx}(\cos^2 \vartheta + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta) + Q_{yy} \sin^2 \vartheta \sin^2 \lambda - (Q_{xx} + Q_{yy}) \sin^2 \vartheta \cos^2 \lambda}{8\pi r^3 [1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{5/2}} \\
&\quad + \frac{-2(Q_{xy} \sin \lambda + Q_{xz} \cos \lambda)(\frac{b}{r} + \cos \vartheta) \sin \vartheta + 2Q_{yz} \sin^2 \vartheta \cos \lambda \sin \lambda}{8\pi r^3 [1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{5/2}} \\
&\stackrel{(**)}{=} \frac{Q_{xx}}{8\pi r^3} \cdot \frac{1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta}{[1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{5/2}} \\
&\quad - \frac{2(Q_{xy} \sin \lambda + Q_{xz} \cos \lambda)}{8\pi r^3} \cdot \frac{(\frac{b}{r} + \cos \vartheta) \sin \vartheta}{[1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{5/2}} \\
&\quad - \frac{(\frac{1}{2}Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda}{8\pi r^3} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{[1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta]^{5/2}} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{Q_{xx}}{8\pi r^3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n^0(\cos \vartheta) \\
&\quad - \frac{2(Q_{xy} \sin \lambda + Q_{xz} \cos \lambda)}{8\pi r^3} \cdot \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n^1(\cos \vartheta) \\
&\quad - \frac{(\frac{1}{2}Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda}{8\pi r^3} \cdot \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n^2(\cos \vartheta) \\
&= \frac{1}{24\pi b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n+1} \left\{ -\frac{3}{2} Q_{xx} n(n-1) P_n^0(\cos \vartheta) \right. \\
&\quad + 2(Q_{xz} \cos \lambda + Q_{xy} \sin \lambda)(n-1) P_n^1(\cos \vartheta) \\
&\quad \left. + [(\frac{1}{2}Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda] P_n^2(\cos \vartheta) \right\}, \quad r > b. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

In der mit (\*\*) gekennzeichneten Umformung wurden die trigonometrischen Beziehungen  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ,  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$  und  $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$  benutzt. Bei der mit (\*) gekennzeichneten Umformung wurden wieder die Ableitungen der erzeugenden Funktion (A.25), (A.27) und (A.29) verwendet.

In sphärischen Koordinaten ergibt sich dann für das gesamte Potential  $u_e$

$$u_e = -\frac{1}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n+1} \left\{ -n(m_x + \frac{n-1}{4b} Q_{xx}) P_n^0(\cos \vartheta) \right. \\ \left. + [(m_z + \frac{n-1}{3b} Q_{xz}) \cos \lambda + (m_y + \frac{n-1}{3b} Q_{xy}) \sin \lambda] P_n^1(\cos \vartheta) \right. \\ \left. + \frac{1}{6b} [(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda] P_n^2(\cos \vartheta) \right\} \quad (3.22)$$

und die daraus resultierende Radialkomponente des Magnetfeldes  $B_{e,r}$

$$B_{e,r} = -\frac{\mu_0}{4\pi b^3} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n+2} \left\{ -n(m_x + \frac{n-1}{4b} Q_{xx}) P_n^0(\cos \vartheta) \right. \\ \left. + [(m_z + \frac{n-1}{3b} Q_{xz}) \cos \lambda + (m_y + \frac{n-1}{3b} Q_{xy}) \sin \lambda] P_n^1(\cos \vartheta) \right. \\ \left. + \frac{1}{6b} [(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda] P_n^2(\cos \vartheta) \right\} \quad (3.23)$$

Die Koeffizienten  $a_n^k$  und  $b_n^k$  lassen sich nun durch einen Koeffizientenvergleich bestimmen, indem man die Gleichungen (3.19) und (3.23) in die Randbedingung (3.18) einsetzt, so daß man folgenden Ausdruck für das magnetische Potential der Chapman-Ferraro-Ströme innerhalb der Magnetosphäre erhält:

$$u_{cfi} = \frac{1}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{r}{R_m}\right)^n \left\{ \right. \\ \left. -n(m_x + \frac{n-1}{4b} Q_{xx}) P_n^0(\cos \vartheta) \right. \\ \left. + [(m_z + \frac{n-1}{3b} Q_{xz}) \cos \lambda + (m_y + \frac{n-1}{3b} Q_{xy}) \sin \lambda] P_n^1(\cos \vartheta) \right. \\ \left. + \frac{1}{6b} [(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda] P_n^2(\cos \vartheta) \right\}. \quad (3.24)$$

### 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

Unter Verwendung von  $\underline{B}_{cfi} = -\mu_0 \nabla u_{cfi}$  lassen sich nun die Magnetfeldkomponenten innerhalb der Magnetosphäre bestimmen:

#### Magnetfeld der Chapman-Ferraro-Ströme in der Halbkugel:

$$B_{cfi,r} = \frac{\mu_0}{4\pi b^3} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+2} \left(\frac{r}{R_m}\right)^{n-1} \left\{ \begin{aligned} & -n(m_x + \frac{n-1}{4b} Q_{xx}) P_n^0(\cos \vartheta) \\ & + [(m_z + \frac{n-1}{3b} Q_{xz}) \cos \lambda + (m_y + \frac{n-1}{3b} Q_{xy}) \sin \lambda] P_n^1(\cos \vartheta) \\ & + \frac{1}{6b} [(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda] P_n^2(\cos \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (3.25a)$$

$$B_{cfi,\vartheta} = \frac{\mu_0}{4\pi b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+2} \left(\frac{r}{R_m}\right)^{n-1} \left\{ \begin{aligned} & -n(m_x + \frac{n-1}{4b} Q_{xx}) \frac{\partial P_n^0(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ & + [(m_z + \frac{n-1}{3b} Q_{xz}) \cos \lambda + (m_y + \frac{n-1}{3b} Q_{xy}) \sin \lambda] \frac{\partial P_n^1(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ & + \frac{1}{6b} [(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda] \frac{\partial P_n^2(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (3.25b)$$

$$B_{cfi,\lambda} = \frac{\mu_0}{4\pi b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+2} \left(\frac{r}{R_m}\right)^{n-1} \left\{ \begin{aligned} & + [-(m_z + \frac{n-1}{3b} Q_{xz}) \sin \lambda + (m_y + \frac{n-1}{3b} Q_{xy}) \cos \lambda] \frac{P_n^1(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \\ & + \frac{1}{3b} [-(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}) \sin 2\lambda - Q_{yz} \cos 2\lambda] \frac{P_n^2(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (3.25c)$$

### 3.5. Magnetfeld im Zylinder

Im folgenden werden die Felder im Schweif berechnet. Hierzu werden Zylinderkoordinaten verwendet, wie sie im Anhang in Abschnitt A.1 eingeführt werden.

Das Magnetfeld im Zylinder setzt sich aus dem Hauptfeld  $\underline{B}_e$  der Erde, dem Feld  $\underline{B}_{cfi}$  der Chapman-Ferraro-Ströme und dem Magnetfeld  $\underline{B}_j$  der Schweifströme zusammen. Zunächst soll lediglich das sogenannte Vakuumfeld bestimmt werden, in dem keine Schweifströme existieren. In Abschnitt 3.6 wird das Vakuumfeld dann um den Effekt der Schweifströme erweitert. Somit gilt für das Potential des Vakuumfeldes:

$$u_v = u_e + u_{cfi}. \quad (3.26)$$

Das Dipol-Quadrupol-Potential  $u_e$  wird genauso angesetzt wie auch bei der Lösung für die Halbkugel. Das Potential der Chapman-Ferraro-Ströme hingegen muß neu berechnet werden, denn die Randbedingung (3.6a)

$$\hat{n} \cdot \underline{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \rho} u = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \rho} (u_e + u_{cfi}) = 0 \quad \text{für } \rho = R_m \quad (3.27)$$

gilt nun statt auf einer Kugeloberfläche auf einem Zylindermantel. Auch hier müssen auch die Randbedingungen (3.5), (3.4) und (3.7) bzw. die abgeschwächte Form (3.8) erfüllt sein. Folgender Ansatz für das Potential  $u_v$  löst die Laplacegleichung  $\Delta u = 0$  in Zylinderkoordinaten und erfüllt zudem die eben genannten Randbedingungen (Voigt, 1981):

$$u_v = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (c_{k,i} \cos k\phi + d_{k,i} \sin k\phi) J_k\left(\frac{x_{k,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{k,i} z/R_m}. \quad (3.28)$$

Hierbei sind  $J_k(x_{k,i}\rho/R_m)$  Besselfunktionen der Ordnung  $k$  und  $x_{k,i}$  die Nullstellen der Ableitung der Besselfunktion. Die Parameter  $c_{k,i}$  und  $d_{k,i}$  sind noch zu bestimmende Koeffizienten. Dieser Ansatz beinhaltet bereits das Potentialfeld der Erde  $u_e$  und das Potential der Chapman-Ferraro-Ströme  $u_{cfi}$ .

Um die Koeffizienten  $c_{k,i}$  und  $d_{k,i}$  zu bestimmen, wird die Bedingung (3.8) ausgenutzt, daß das Potential an der Grenzfläche zwischen Halbkugel und Zylinder, also bei  $z = 0$  bzw.  $\vartheta = \pi/2$ , stetig ist.

Dazu wird auf der einen Seite das zusammengesetzte Potential der Gleichungen (3.15) und (3.24) in der Halbkugel und zum anderen der Ansatz (3.28) im Zylinder an der Stelle  $z = 0$  verglichen. Um einen Koeffizientenvergleich durchführen zu können, wird das Potential der Halbkugel zunächst in zylindrische Koordinaten überführt. Der Einfachheit halber werden die einzelnen Anteile getrennt von einander umgeformt.

Dipolpotential:

$$u_d \stackrel{(3.12)}{=} \frac{-m_x(z+b) + m_y y + m_z x}{4\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{3/2}} \stackrel{(A.5)}{=} \frac{-m_x(z+b) + m_y \rho \sin \phi + m_z \rho \cos \phi}{4\pi[(z+b)^2 + \rho^2]^{3/2}} \quad (3.29)$$

Quadrupolpotential:

$$\begin{aligned}
 u_q &\stackrel{(3.14)}{=} \frac{Q_{xx}(z+b)^2 + Q_{yy}y^2 - (Q_{xx} + Q_{yy})x^2}{8\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{5/2}} \\
 &\quad + \frac{-2Q_{xy}(z+b)y - 2Q_{xz}(z+b)x + 2Q_{yz}yx}{8\pi[(z+b)^2 + y^2 + x^2]^{5/2}} \\
 &\stackrel{(A.5)}{=} \frac{Q_{xx}(z+b)^2 + Q_{yy}\rho^2 \sin^2 \phi - (Q_{xx} + Q_{yy})\rho^2 \cos^2 \phi}{8\pi[(z+b)^2 + \rho^2]^{5/2}} \\
 &\quad + \frac{-2Q_{xy}(z+b)\rho \sin \phi - 2Q_{xz}(z+b)\rho \cos \phi + 2Q_{yz}\rho^2 \cos \phi \sin \phi}{8\pi[(z+b)^2 + \rho^2]^{5/2}} \\
 &= \frac{Q_{xx}(z+b)^2 - \frac{1}{2}Q_{xx}\rho^2 - 2(Q_{xy} \sin \phi + Q_{xz} \cos \phi)\rho(z+b)}{8\pi[(z+b)^2 + \rho^2]^{5/2}} \\
 &\quad + \frac{-((\frac{1}{2}Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\phi - Q_{yz} \sin 2\phi)\rho^2}{8\pi[(z+b)^2 + \rho^2]^{5/2}}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Potential der Chapman-Ferraro-Ströme:

$$\begin{aligned}
 u_{cfi} &\stackrel{(3.24)}{=} \frac{1}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{r}{R_m}\right)^n \left\{ -n(m_x + \frac{n-1}{4b} Q_{xx}) P_n^0(\cos \vartheta) \right. \\
 &\quad + [(m_z + \frac{n-1}{3b} Q_{xz}) \cos \lambda + (m_y + \frac{n-1}{3b} Q_{xy}) \sin \lambda] P_n^1(\cos \vartheta) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6b} [(\frac{1}{2}Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\lambda - Q_{yz} \sin 2\lambda] P_n^2(\cos \vartheta) \right\} \\
 &\stackrel{(A.10)}{=} \frac{1}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{R_m}\right)^n \left\{ -n(m_x + \frac{n-1}{4b} Q_{xx}) P_n^0\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) \right. \\
 &\quad + [(m_z + \frac{n-1}{3b} Q_{xz}) \cos \phi + (m_y + \frac{n-1}{3b} Q_{xy}) \sin \phi] P_n^1\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6b} [(\frac{1}{2}Q_{xx} + Q_{yy}) \cos 2\phi - Q_{yz} \sin 2\phi] P_n^2\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Betrachtet man nun das Gesamtpotential  $u = u_d + u_q + u_{cfi}$  an der Stelle  $z = 0$  und sortiert die Terme nach dem Grad der Harmonischen der trigonometrischen Funktionen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{4\pi} \left\{ m_x f_0^d(\rho) + Q_{xx} f_0^q(\rho) \right. \\
 &\quad + [m_z f_1^d(\rho) + Q_{xz} f_1^q(\rho)] \cos \phi + [m_y f_1^d(\rho) + Q_{xy} f_1^q(\rho)] \sin \phi \\
 &\quad \left. + (\frac{1}{2}Q_{xx} + Q_{yy}) f_2^q(\rho) \cos 2\phi + Q_{yz} f_2^q(\rho) \sin 2\phi \right\}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

mit den lediglich von  $\rho$  abhängenden Funktionen  $f_k^d$  und  $f_k^q$ :

$$f_0^d(\rho) = \frac{-b}{(b^2 + \rho^2)^{3/2}} - \frac{1}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{\rho}{R_m}\right)^n P_n^0(0), \quad (3.33a)$$

$$f_0^q(\rho) = \frac{\frac{1}{2}\rho^2 + b^2}{2(b^2 + \rho^2)^{5/2}} - \frac{1}{4b^3} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n-1) \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{\rho}{R_m}\right)^n P_n^0(0), \quad (3.33b)$$

$$f_1^d(\rho) = \frac{\rho}{(b^2 + \rho^2)^{3/2}} + \frac{1}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{\rho}{R_m}\right)^n P_n^1(0), \quad (3.33c)$$

$$f_1^q(\rho) = \frac{-\rho b}{(b^2 + \rho^2)^{5/2}} + \frac{1}{3b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{\rho}{R_m}\right)^n P_n^1(0), \quad (3.33d)$$

$$f_2^q(\rho) = \frac{-\rho^2}{2(b^2 + \rho^2)^{5/2}} - \frac{1}{6b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{\rho}{R_m}\right)^n P_n^2(0). \quad (3.33e)$$

Die Funktionen  $f_k^{d,q}$  sind radiale Funktionen, das heißt sie hängen nur von  $\rho$  ab. Vergleicht man nun Gleichung (3.32) mit dem Ansatz (3.28) an der Stelle  $z = 0$

$$u_v = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (c_{k,i} \cos k\phi + d_{k,i} \sin k\phi) J_k\left(\frac{x_{k,i}\rho}{R_m}\right), \quad (3.34)$$

so ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{m_x}{4\pi} f_0^d(\rho) + \frac{Q_{xx}}{4\pi} f_0^q(\rho) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_{0,i} J_0\left(\frac{x_{0,i}\rho}{R_m}\right) \\ &=: \frac{m_x}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{0,i}^d J_0\left(\frac{x_{0,i}\rho}{R_m}\right) + \frac{Q_{xx}}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{0,i}^q J_0\left(\frac{x_{0,i}\rho}{R_m}\right) \end{aligned} \quad (3.35a)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_y}{4\pi} f_1^d(\rho) + \frac{Q_{xy}}{4\pi} f_1^q(\rho) &= \sum_{i=0}^{\infty} d_{1,i} J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) \\ &=: \frac{m_y}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i}^d J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) + \frac{Q_{xy}}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i}^q J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) \end{aligned} \quad (3.35b)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_z}{4\pi} f_1^d(\rho) + \frac{Q_{xz}}{4\pi} f_1^q(\rho) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_{1,i} J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) \\ &=: \frac{m_z}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i}^d J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) + \frac{Q_{xz}}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i}^q J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) \end{aligned} \quad (3.35c)$$

$$\frac{\frac{1}{2}Q_{xx} + Q_{yy}}{4\pi} f_2^q(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2,i} J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) =: \sum_{i=0}^{\infty} a_{2,i}^q J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) \quad (3.35d)$$

$$\frac{Q_{yz}}{4\pi} f_2^q(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} d_{2,i} J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) =: \sum_{i=0}^{\infty} a_{2,i}^q J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) \quad (3.35e)$$

### 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

---

Die radialen Funktionen  $f_k^{d,q}$  lassen sich nun in Fourier-Bessel-Reihen (siehe im Anhang in Abschnitt A.3.2) entwickeln, wobei  $x_{k,i}$  die Nullstellen der Ableitung der Besselfunktion sind:

$$f_k^{d,q} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k,i}^{d,q} J_k\left(\frac{x_{k,i}\rho}{R_m}\right). \quad (3.36)$$

Um die Koeffizienten  $a_{k,i}^{d,q}$  zu bestimmen, wird die Orthogonalitätsrelation der Besselfunktionen, wie in Abschnitt A.3.2 beschrieben, verwendet und man erhält:

$$a_{k,i}^{d,q} = \frac{2}{R_m^2 [1 - (\frac{k}{x_{k,i}})^2] [J_k(x_{k,i})]^2} \int_0^{R_m} f_k^{d,q}(\rho) J_k\left(\frac{x_{k,i}\rho}{R_m}\right) \rho \, d\rho. \quad (3.37)$$

Da die Funktionen  $f_k^{d,q}$  recht kompliziert sind, lassen sich diese Integrale nicht mehr analytisch lösen, sondern müssen numerisch ausgewertet werden.

Geht man nun zurück in den Ansatz (3.28), so schreibt sich das Potential für das Vakuumfeld im Zylinder wie nachstehend angegeben:

$$\begin{aligned} u_v = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} & \left[ (m_x a_{0,i}^d + Q_{xx} a_{0,i}^q) J_0\left(\frac{x_{0,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{0,i} z/R_m} \right. \\ & + (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \cos \phi J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{1,i} z/R_m} \\ & + (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \sin \phi J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{1,i} z/R_m} \\ & + \left(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}\right) a_{2,i}^q \cos 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{2,i} z/R_m} \\ & \left. + Q_{yz} a_{2,i}^q \sin 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{2,i} z/R_m} \right]. \quad (3.38) \end{aligned}$$

Das Magnetfeld wird durch Gradientenbildung  $\underline{B} = -\mu_0 \nabla u(\rho, \phi, z)$  aus dem Potential bestimmt. Für die Ableitung der Besselfunktionen wird auf die Rekursionsformel (A.43) zurückgegriffen.

**Vakuumsfeld im Zylinder:**

$$\begin{aligned}
B_{v,\rho} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{x_{0,i}}{R_m} (m_x a_{0,i}^d + Q_{xx} a_{0,i}^q) J_1\left(\frac{x_{0,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{0,i} z/R_m} \right. \\
& + \frac{x_{1,i}}{2R_m} (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \cos \phi \left[ J_2\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) - J_0\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) \right] e^{-x_{1,i} z/R_m} \\
& + \frac{x_{1,i}}{2R_m} (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \sin \phi \left[ J_2\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) - J_0\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) \right] e^{-x_{1,i} z/R_m} \\
& + \frac{x_{2,i}}{2R_m} \left(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}\right) a_{2,i}^q \cos 2\phi \left[ J_3\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) - J_1\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) \right] e^{-x_{2,i} z/R_m} \\
& \left. + \frac{x_{2,i}}{2R_m} Q_{yz} a_{2,i}^q \sin 2\phi \left[ J_3\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) - J_1\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) \right] e^{-x_{2,i} z/R_m} \right] \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{v,\phi} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\rho} (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \sin \phi J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{1,i} z/R_m} \right. \\
& - \frac{1}{\rho} (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \cos \phi J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{1,i} z/R_m} \\
& + \frac{2}{\rho} \left(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}\right) a_{2,i}^q \sin 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{2,i} z/R_m} \\
& \left. - \frac{2}{\rho} Q_{yz} a_{2,i}^q \cos 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{2,i} z/R_m} \right] \quad (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{v,z} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{x_{0,i}}{R_m} (m_x a_{0,i}^d + Q_{xx} a_{0,i}^q) J_0\left(\frac{x_{0,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{0,i} z/R_m} \right. \\
& + \frac{x_{1,i}}{R_m} (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \cos \phi J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{1,i} z/R_m} \\
& + \frac{x_{1,i}}{R_m} (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \sin \phi J_1\left(\frac{x_{1,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{1,i} z/R_m} \\
& + \frac{x_{2,i}}{R_m} \left(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}\right) a_{2,i}^q \cos 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{2,i} z/R_m} \\
& \left. + \frac{x_{2,i}}{R_m} Q_{yz} a_{2,i}^q \sin 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{2,i} z/R_m} \right] \quad (3.41)
\end{aligned}$$

**3.6. Hinzunahme der Schweißströme**

Wie bereits mehrfach erwähnt, wird der Schweißstrom bei Voigt (1981) nicht als Strom modelliert, sondern es wird lediglich der Effekt, den diese Ströme erzeugen, durch eine Streckung der Feldlinien wiedergegeben. Das Vakuumsfeld soll also durch ein Magnetfeld  $\underline{B}_j$  ersetzt werden, dessen Feldlinien im Schweiß gestreckt sind. Um dieses Feld zu konstruieren, werden die  $\rho$ - und  $\phi$ -Komponente des Vakuummagnetfeldes  $\underline{B}_v$  um den Faktor  $\lambda$  gestaucht, wobei  $\lambda$  zwischen 0 und 1 variieren kann. Das Vakuumsfeld

### 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

wird dann durch  $\lambda = 1$  wiedergegeben und der Fall einer Harrisstromschicht mit  $\lambda = 0$  (siehe Abbildung 3.2).

Die Divergenzfreiheit dieses Feldes  $\nabla \cdot \underline{B}_j = 0$  wird gewährleistet, indem der Exponentialfaktor von  $e^{-x_{k,i}z/R_m}$  in  $e^{-\lambda x_{k,i}z/R_m}$  übergeht. Das Magnetfeld läßt sich dann wie folgt schreiben:

#### Magnetfeld der Schweifströme:

$$\begin{aligned}
 B_{j,\rho} = & \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{x_{0,i}}{R_m} (m_x a_{0,i}^d + Q_{xx} a_{0,i}^q) J_1\left(\frac{x_{0,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{0,i} z/R_m} \right. \\
 & + \frac{x_{1,i}}{2R_m} (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \cos \phi \left[ J_2\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) - J_0\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) \right] e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \\
 & + \frac{x_{1,i}}{2R_m} (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \sin \phi \left[ J_2\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) - J_0\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) \right] e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \\
 & + \frac{x_{2,i}}{2R_m} \left( \frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy} \right) a_{2,i}^q \cos 2\phi \left[ J_3\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) - J_1\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) \right] e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \\
 & \left. + \frac{x_{2,i}}{2R_m} Q_{yz} a_{2,i}^q \sin 2\phi \left[ J_3\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) - J_1\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) \right] e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \right] \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{j,\phi} = & \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\rho} (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \sin \phi J_1\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \right. \\
 & - \frac{1}{\rho} (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \cos \phi J_1\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \\
 & + \frac{2}{\rho} \left( \frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy} \right) a_{2,i}^q \sin 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \\
 & \left. - \frac{2}{\rho} Q_{yz} a_{2,i}^q \cos 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \right] \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

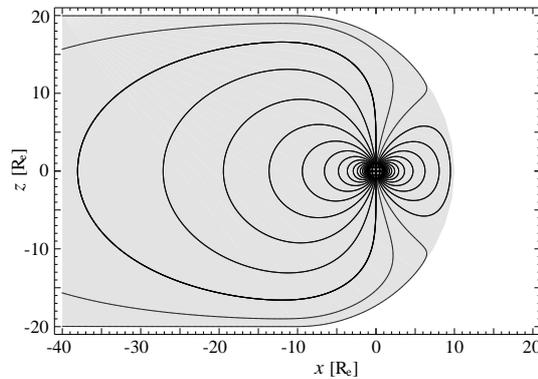
$$\begin{aligned}
 B_{j,z} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{x_{0,i}}{R_m} (m_x a_{0,i}^d + Q_{xx} a_{0,i}^q) J_0\left(\frac{x_{0,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{0,i} z/R_m} \right. \\
 & + \frac{x_{1,i}}{R_m} (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \cos \phi J_1\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \\
 & + \frac{x_{1,i}}{R_m} (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \sin \phi J_1\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \\
 & + \frac{x_{2,i}}{R_m} \left( \frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy} \right) a_{2,i}^q \cos 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \\
 & \left. + \frac{x_{2,i}}{R_m} Q_{yz} a_{2,i}^q \sin 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \right] \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Bei dieser Darstellung gibt es Probleme mit dem kontinuierlichen Übergang des Magnetfeldes von der Halbkugel in den Zylinder. Um diese zu verhindern, setzt man das Magnetfeld im Zylinder aus

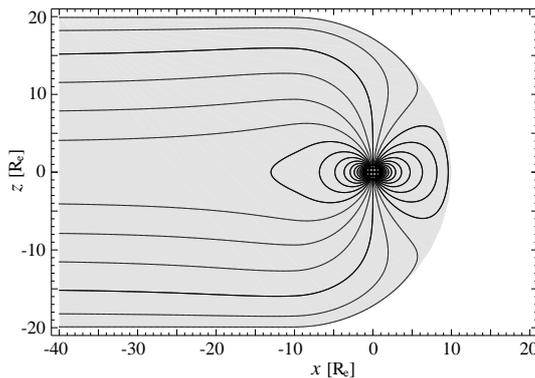
$$\underline{B} = \frac{1}{2}(\underline{B}_v + \underline{B}_j) \quad (3.45)$$

zusammen (Voigt, 1981). So gewährleistet man zum einen den glatteren Übergang vom erdnahen Magnetfeld zu den gestreckten Feldlinien im Schweif und zum anderen, daß  $\underline{B} = \underline{B}_v$  für  $\lambda = 1$  ist, weil dann  $\underline{B}_v = \underline{B}_j$  gilt. Im Fall des Vakuumfeldes (Abbildung 3.2a) sind alle Feldlinien im Schweif geschlossen.

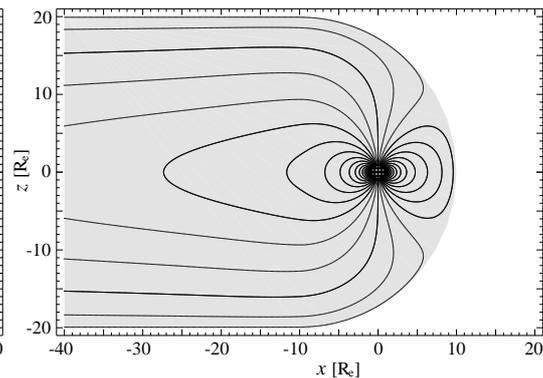
Durch die extreme Streckung der Feldlinien ( $\lambda = 0$ ), gehen viele der Schweiffeldlinien in offene Feldlinien über (Abbildung 3.2b). Einen solchen Feldlinienverlauf erhält man bei der Simulation einer Stromschicht, die sich in der Äquatorebene in den Schweif hinein erstreckt. Als realistischen Wert für das heutige Erdmagnetfeld gibt



(a) Vakuumfeld,  $\lambda = 1$ .



(b) Feld mit Schweifstrom,  $\lambda = 0$ .



(c) Feld mit Schweifstrom,  $\lambda = 0.15$  wird von Voigt (1981) als realistisch angenommen.

**Abbildung 3.2.:** Einfluß des Streckparameters  $\lambda$  auf ein zonales Dipolfeld.

Voigt (1981) einen Wert  $\lambda = 0.15$  an. Dieser Wert wurde bei der Anpassung des Modells an gemessene Daten empirisch bestimmt.

### 3.7. Beitrag des interplanetaren Magnetfeldes

Das Magnetfeld außerhalb der Magnetosphäre setzt sich zusammen aus dem interplanetaren Magnetfeld  $\underline{B}_{imf}$ , kurz IMF genannt, und dem Magnetfeld der Chapman-Ferraro-Ströme  $\underline{B}_{cfa}$ . Das interplanetare Magnetfeld wird als homogen angenommen. Die in GSE-Koordinaten gegebenen Feldkomponenten lassen sich nach der Transformationsvorschrift (3.1) in M-Koordinaten umwandeln.

**Interplanetares Magnetfeld:  $\underline{B}_{imf}$**

$$B_{imf,x} = B_{imf,gse,z} \quad (3.46a)$$

$$B_{imf,y} = B_{imf,gse,y} \quad (3.46b)$$

$$B_{imf,z} = -B_{imf,gse,x} \quad (3.46c)$$

Um die Magnetfeldbeiträge der Chapman-Ferraro-Ströme zu bestimmen, werden wie bereits beim Feld innerhalb der Magnetosphäre die beiden geometrischen Teilkörper der Magnetosphäre getrennt betrachtet.

Zunächst wird das Magnetfeld außerhalb der Halbkugel bestimmt. Wie bereits in Abschnitt 3.4 erläutert, läßt sich das Magnetfeld der Chapman-Ferraro-Ströme aus einem skalaren Potential ableiten. Für das Magnetfeld außerhalb der Halbkugel läßt sich folgender Ansatz machen (Voigt, 1981):

$$u_{cfa} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \frac{R_m^{n+2}}{r^{n+1}} (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^m(\cos \vartheta), \quad r > R_m. \quad (3.47)$$

Die Koeffizienten  $a_n^k$  und  $b_n^k$  können mit Hilfe der Randbedingung (3.6b) bestimmt werden, die besagt, daß es keine Normalkomponente auf der Magnetopause gibt. Dazu wird die Normalkomponente berechnet, die gleich der radialen Komponente ist, die aus dem in Gleichung (3.47) gegebenen Potential abgeleitet werden kann:

$$\begin{aligned} B_{cfa,r} &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial r} u_{cfa} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{n+1} \frac{R_m^{n+2}}{r^{n+2}} \Big|_{r=R_m} (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^m(\cos \vartheta) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^m(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Zum anderen muß das interplanetare Magnetfeld aus den Gleichungen (3.46a)-(3.46c) in Kugelkoordinaten umgewandelt werden. Die hierfür notwendige Koordinatentransformation ist im Anhang in Abschnitt A.1 zu finden. Aus Gleichung (A.3) ergibt sich

dann für die Radialkomponente des interplanetaren Magnetfeldes

$$B_{imf,r} = B_{imf,x} \sin \vartheta \cos \lambda + B_{imf,y} \sin \vartheta \sin \lambda + B_{imf,z} \cos \vartheta. \quad (3.49)$$

Der Koeffizientenvergleich  $B_{imf,\rho}|_{\rho=R_m} \stackrel{!}{=} -B_{cfa,\rho}|_{\rho=R_m}$  zeigt, daß in der Kugelfunktionsentwicklung im Ansatz (3.47) alle Koeffizienten  $a_n^k$  und  $b_n^k$  außer  $a_1^0$ ,  $a_1^1$  und  $b_1^1$  gleich Null sind. Und man erhält für das magnetische Potential der Chapman-Ferraro-Ströme außerhalb der Magnetosphäre die folgende Beziehung:

$$u_{cfa} = -\frac{R_m^3}{2\mu_0 r^2} (B_{imf,z} P_1^0 + B_{imf,x} \cos \lambda P_1^1 + B_{imf,y} \sin \lambda P_1^1). \quad (3.50)$$

Hierbei ist  $P_n^m = P_n^m(\cos \vartheta)$ . Durch Gradientenbildung  $\underline{B}_{cfa} = -\mu_0 \nabla u_{cfa}$  lassen sich die Magnetfeldkomponenten außerhalb der Halbkugel bestimmen:

**Magnetfeld der Chapman-Ferraro-Ströme außerhalb der Halbkugel:**

$$B_{cfa,r} = -\left(\frac{R_m}{r}\right)^3 (B_{imf,z} P_1^0 + B_{imf,x} \cos \lambda P_1^1 + B_{imf,y} \sin \lambda P_1^1) \quad (3.51a)$$

$$B_{cfa,\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_m}{r}\right)^3 (B_{imf,z} \frac{dP_1^0}{d\vartheta} + B_{imf,x} \cos \lambda \frac{dP_1^1}{d\vartheta} + B_{imf,y} \sin \lambda \frac{dP_1^1}{d\vartheta}) \quad (3.51b)$$

$$B_{cfa,\lambda} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \left(\frac{R_m}{r}\right)^3 (-B_{imf,x} \sin \lambda P_1^1 + B_{imf,y} \cos \lambda P_1^1) \quad (3.51c)$$

Nun wird das Magnetfeld außerhalb des Zylinders hergeleitet. Die Normalkomponente des gesamten Magnetfeldes, die in der Randbedingung (3.6b) betrachtet wird, entspricht in der Zylindergeometrie der  $\rho$ -Komponente des Feldes und es folgt mittels Gleichung (A.8):

$$B_{imf,\rho} = B_{imf,x} \cos \phi + B_{imf,y} \sin \phi. \quad (3.52)$$

Das magnetische Potential der Chapman-Ferraroströme außerhalb des Zylinders läßt sich durch eine Reihenentwicklung beschreiben:

$$u_{cfa} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi) \frac{R_m^{n+1}}{\rho^n}, \quad \text{für } \rho > R_m. \quad (3.53)$$

Die Koeffizienten  $c_n$  werden nun durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt. Dazu betrachtet man die radialen Magnetfeldkomponenten auf der Magnetopause ( $\rho = R_m$ ), die sich aus den Gleichungen (3.52) und (3.53) ergeben. Es muß gelten:

$$B_{imf,\rho}|_{\rho=R_m} \stackrel{!}{=} -B_{cfa,\rho}|_{\rho=R_m}$$

$$B_{imf,x} \cos \phi + B_{imf,y} \sin \phi = - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi) \quad (3.54)$$

### 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

---

Somit fallen alle Koeffizienten  $c_n$  für  $n \neq 1$  weg und das Potential der Chapman-Ferraro-Ströme schreibt sich wie folgt:

$$u_{cfa} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{R_m^2}{\rho} (B_{imf,x} \cos \phi + B_{imf,y} \sin \phi). \quad (3.55)$$

Das Magnetfeld der Chapman-Ferraro-Ströme außerhalb des Zylinders leitet sich dann durch Gradientenbildung  $\underline{B}_{cfa} = -\mu_0 \nabla u_{cfa}$  her.

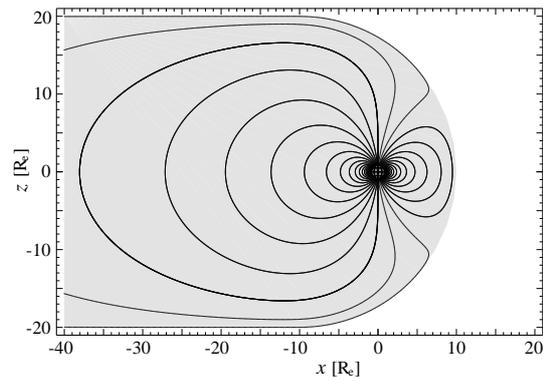
#### Magnetfeld der Chapman-Ferraro-Ströme außerhalb des Zylinders:

$$B_{cfa,\rho} = -\left(\frac{R_m}{\rho}\right)^2 (B_{imf,x} \cos \phi + B_{imf,y} \sin \phi) \quad (3.56a)$$

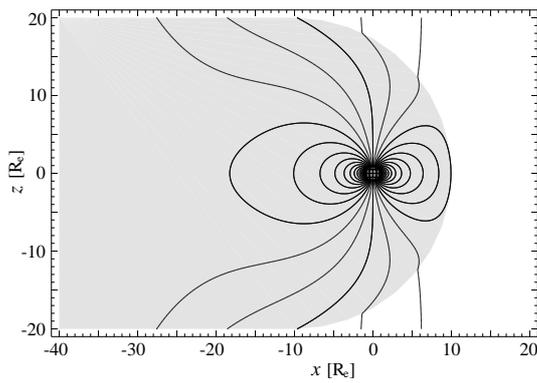
$$B_{cfa,\phi} = \left(\frac{R_m}{\rho}\right)^2 (-B_{imf,x} \sin \phi + B_{imf,y} \cos \phi) \quad (3.56b)$$

$$B_{cfa,z} = 0 \quad (3.56c)$$

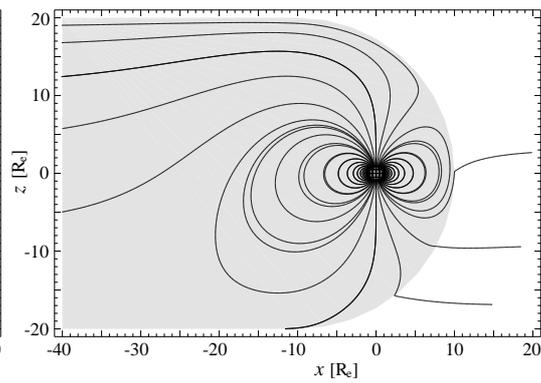
In Abbildung 3.3 wird gezeigt, welchen Einfluß das interplanetare Magnetfeld auf den Feldlinienverlauf innerhalb der Magnetosphäre hat, wenn man statt der geschlossenen Magnetopause (Abbildung 3.3a) eine offene betrachtet. Das Magnetfeld setzt sich wie in den Gleichungen (3.3a) und (3.3b) aus den verschiedenen Anteilen zusammen, die in den vorangegangenen Abschnitten hergeleitet wurden. Für die Durchlässigkeitskoeffizienten wurden  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$  gewählt, d. h. 90 % des interplanetaren Magnetfeldes gelangen in die Magnetosphäre, während 10 % des inneren Erdfeldes hinausgelangen. Diese Wahl der Werte wird bei Voigt (1981) als realistisch vorgeschlagen. In Abbildung 3.3b ist das interplanetare Magnetfeld senkrecht zur Verbindungslinie Erde-Sonne orientiert, in Abbildung 3.3c hingegen parallel. Im senkrechten Fall werden die Feldlinien „aufgebogen“, und es entstehen offene Feldlinien, die sich mit den interplanetaren Feldlinien verbinden. Im erdfernen Schweif dominiert das interplanetare Magnetfeld. Im parallelen Fall werden die Feldlinien der einen Hemisphäre in den Schweif hineingestreckt, während sie auf der anderen Hemisphäre in Richtung der Sonne gelenkt werden. Weitere Beispiele und Erläuterungen zu Feldlinienverläufen sind in Kapitel 4 zu finden.



(a) Geschlossene Magnetosphäre,  $c_i = c_a = 0$ .



(b) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  senkrecht.



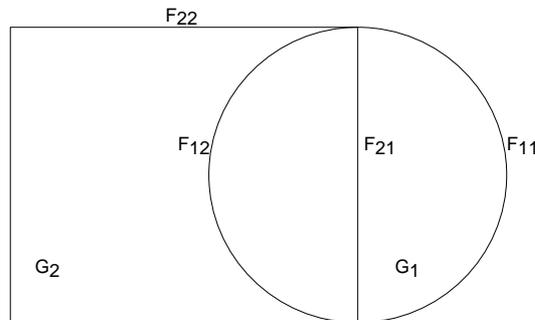
(c) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  parallel.

**Abbildung 3.3.:** Einfluß der Magnetopausendurchlässigkeitsparameter  $c_i$ ,  $c_a$  auf ein zonales Dipolfeld.  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$  werden bei Voigt (1981) als realistisch angenommen. Die Ausrichtung des interplanetaren Magnetfeldes bezieht sich auf die Orientierung des Feldes in Bezug auf die Erde-Sonne-Achse.

### 3.8. Iterativer Prozeß zur Koeffizientenbestimmung

Um die Koeffizienten der Fourier-Bessel-Reihe im Zylinder zu bestimmen, wurde ausgenutzt, daß das Potential an der Schnittfläche zwischen Halbkugel und Zylinder stetig ist. Strenggenommen müßte man fordern, daß das Magnetfeld ebenfalls dort stetig ist. In Abschnitt 3.2 wurde bereits erwähnt, daß die Lösung der Gleichung über Separation der Variablen gefunden wird. Alle in diesem Kapitel gemachten Ansätze für die jeweiligen Potentiale beruhen auf diesem Verfahren. Die Laplacegleichung ist aber nicht gleichzeitig in beiden geometrischen Systemen separierbar, sondern nur entweder in der Halbkugel oder im Zylinder. Dies hat zur Folge, daß bei vorausgesetzter Stetigkeit des Potentials an der Schnittfläche zwischen Halbkugel und Zylinder zwar die  $x$ - und  $y$ -Komponente des Magnetfeldes stetig ist, nicht aber die  $z$ -Komponente. Die Stetigkeit der  $x$ - und  $y$ -Komponente des Magnetfeldes kann leicht gezeigt werden, indem man sich veranschaulicht, wie diese Komponenten gebildet werden. So ist z. B. die  $x$ -Komponente der Gradient des Potentials in  $x$ -Richtung. Dieser Gradient liegt also in der Schnittebene zwischen Halbkugel und Zylinder. Da in dieser Ebene alle Werte für das Potential in der Halbkugel und das Potential im Zylinder gleich sind, sind auch die Gradienten gleich, die in dieser Ebene liegen. Gleiches gilt somit auch für die  $y$ -Komponente, nicht aber für die  $z$ -Komponente, weil in diesem Fall der Gradient aus der Ebene herauszeigt.

Um diesem Problem Abhilfe zu schaffen, schlägt Voigt (1972) einen iterativen Prozeß vor, um die Koeffizienten der jeweiligen Entwicklungen in der Halbkugel und im Zylinder zu bestimmen. Abbildung 3.4 veranschaulicht die einzelnen Teilgebiete und Ränder der Modellmagnetosphäre.



**Abbildung 3.4.:** Teilgebiete und Ränder der Modellmagnetosphäre: Das Gebiet der Kugel  $G_1$  wird von den Rändern  $F_{11}$  und  $F_{12}$  begrenzt, der Zylinder  $G_2$  von den Rändern  $F_{21}$  und  $F_{22}$ .

Man gehe nun wie folgt vor:

1. Die Bedingung, daß die Normalkomponente des gesamten Magnetfeldes auf dem Rand  $F_{11} + F_{22}$  gleich Null ist, wird festgelegt mit:

$$B_n = B_{e,r} + B_{cf,r} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.57)$$

2. Nun werden die Randwerte von  $F_{11}$  auf  $F_{12}$  fortgesetzt, so daß sie überall auf dem Rand der Kugel  $G_1$  gegeben sind:  $B_n = B_{e,r} + B_{cfi,r} \stackrel{!}{=} 0$ .
3. Aus  $B_{cfi,r} = B_{e,r} - B_n$  läßt sich dann das Potential  $u_{cfi}$  der Chapman-Ferraro-Ströme innerhalb der Kugel bestimmen.
4. Die Randwerte auf  $F_{21}$  sind somit bekannt, und das Potential  $u_v$  des Vakuumfeldes im Zylinder  $G_2$  kann hergeleitet werden.
5. Damit ergeben sich neue Randwerte für die Fläche  $F_{12}$ :

$$B_n = \begin{cases} 0, & \vartheta \geq \pi/2 \\ B_{v,r}, & \vartheta < \pi/2 \end{cases} \quad (3.58)$$

Auf der Kugeloberfläche  $F_{11} + F_{12}$  läßt sich die Normalkomponente  $B_n$  durch eine Kugelfunktionsentwicklung (siehe hierzu im Anhang den Abschnitt A.2.3) der Form

$$B_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^k(\cos \vartheta) \quad (3.59)$$

beschreiben mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\left. \begin{matrix} a_k^n \\ b_k^n \end{matrix} \right\} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} B_n(\vartheta, \lambda) \begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} P_n^k(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda. \quad (3.60)$$

Die Prozedur zur Berechnung der Koeffizienten wiederholt sich nun beginnend bei Punkt 3.

Es hat sich gezeigt (Voigt, 1972), daß dieses Verfahren bereits nach wenigen Durchläufen konvergiert.

### 3.9. Berechnung des Schweifstromes

Durch die Streckung der Magnetfeldlinien (vgl. Abschnitt 3.6) im Schweif wird ein Strom  $\underline{j}$  erzeugt, der sich aus der Maxwellgleichung

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \underline{\dot{D}} \quad (3.61)$$

berechnen läßt. Wie in Abschnitt 2.1 erwähnt, werden nur statische Zustände betrachtet, und somit entfällt die Verschiebungsstromdichte  $\underline{\dot{D}}$ . Mit  $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$  ergibt sich dann

$$\underline{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{B}. \quad (3.62)$$

### 3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells

Das Magnetfeld im Schweif setzt sich nach Gleichung (3.45) zusammen aus dem Vakuumfeld  $\underline{B}_v$  und dem Feld der Schweifströme  $\underline{B}_j$ :

$$\underline{B} = \frac{1}{2}(\underline{B}_v + \underline{B}_j).$$

Das Vakuumfeld  $\underline{B}_v = -\mu_0 \nabla u_v$  wurde direkt aus dem Gradienten eines skalaren Potentials hergeleitet. Somit ist die Rotation dieses Feldes identisch Null, denn es gilt  $\nabla \times \nabla \phi \equiv 0$ . Der Strom ergibt sich dann lediglich aus dem Feld der Schweifströme  $\underline{B}_j$ :

$$\underline{j} = \frac{1}{2\mu_0} \nabla \times \underline{B}_j, \quad (3.63)$$

und für die Komponenten des Schweifstromes ergibt sich dann:

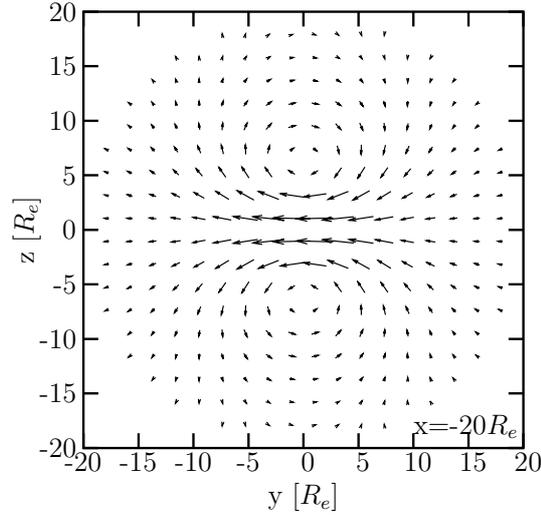
#### Schweifströme im Zylinders:

$$j_\rho = \frac{1 - \lambda^2}{4\pi R_m \rho} \sum_{i=0}^{\infty} \left[ -x_{1,i} (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \cos \phi J_1\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \right. \\ + x_{1,i} (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \sin \phi J_1\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \\ - 2x_{2,i} \left(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}\right) a_{2,i}^q \cos 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \\ \left. + 2x_{2,i} Q_{yz} a_{2,i}^q \sin 2\phi J_2\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \right] \quad (3.64a)$$

$$j_\phi = \frac{1 - \lambda^2}{8\pi R_m^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ 2x_{0,i}^2 (m_x a_{0,i}^d + Q_{xx} a_{0,i}^q) J_1\left(\frac{x_{0,i} \rho}{R_m}\right) e^{-\lambda x_{0,i} z/R_m} \right. \\ + x_{1,i}^2 (m_z a_{1,i}^d + Q_{xz} a_{1,i}^q) \cos \phi \left[ J_2\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) - J_0\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) \right] e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \\ + x_{1,i}^2 (m_y a_{1,i}^d + Q_{xy} a_{1,i}^q) \sin \phi \left[ J_2\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) - J_0\left(\frac{x_{1,i} \rho}{R_m}\right) \right] e^{-\lambda x_{1,i} z/R_m} \\ + x_{2,i}^2 \left(\frac{1}{2} Q_{xx} + Q_{yy}\right) a_{2,i}^q \cos 2\phi \left[ J_3\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) - J_1\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) \right] e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \\ \left. + x_{2,i}^2 Q_{yz} a_{2,i}^q \sin 2\phi \left[ J_3\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) - J_1\left(\frac{x_{2,i} \rho}{R_m}\right) \right] e^{-\lambda x_{2,i} z/R_m} \right\} \quad (3.64b)$$

$$j_z = 0 \quad (3.64c)$$

Die Ströme auf der Magnetopause können mit diesen Berechnungen nicht dargestellt werden, sondern lediglich diejenigen innerhalb des Schweifes. Abbildung 3.5 zeigt ein Stromfeld für einen zonalen Dipol in einer Ebene senkrecht zur Schweifachse und in einer Entfernung von  $20 R_e$  vom Erdmittelpunkt aus. Es wurde eine geschlossene Magnetosphäre und ein Streckfaktor  $\lambda = 0$  gewählt. Die zu erwartende  $\Theta$ -förmige Struktur der Schweifströme läßt sich gut erkennen, besonders die Stromschicht in der Äquatorebene.



**Abbildung 3.5.:** Schweifstrom eines zonalen Dipols in der  $yz$ -Ebene bei  $x = -20R_e$ . Zu erkennen ist die für einen zonalen Dipol typische  $\Theta$ -Struktur des Stromes.

### 3.10. Erweiterungsansatz für höhere Multipole

Statt des Dipol- und Quadrupolpotentials, das in Gleichung (3.10) angesetzt wurde, kann man auch einen allgemeinen Ansatz für das Potential wählen, wie er bereits in Abschnitt 2.1 mit Gleichung (2.5) vorgestellt wurde (siehe Lense, 1954):

$$u_e(x, y, z) = \sum_{l=1}^N \sum_{\alpha=0}^l \sum_{\beta=0}^{l-\alpha} a_{l\alpha\beta} \frac{x^\alpha y^\beta z^{l-\alpha-\beta}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{(2l+1)/2}}, \quad (3.65)$$

wobei  $N$  der maximale Grad der Multipolentwicklung ist. Für eine Entwicklung, die auch Oktupolanteile enthalten soll, wäre  $N = 3$  zu setzen. Das Potential der Chapman-Ferraroströme innerhalb der Halbkugel hat dann die Form

$$u_{cfi} = \frac{1}{4\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^N \frac{n+1}{n} \left(-\frac{b}{R_m}\right)^{n+1} \left(\frac{r}{R_m}\right)^n (a_n^k \cos k\lambda + b_n^k \sin k\lambda) P_n^k \quad (3.66)$$

mit  $P_n^k = P_n^k(\cos \vartheta)$ . Die Koeffizienten  $a_n^k$  und  $b_n^k$  bestimmen sich aus der Randbedingung (3.6a). Der nächste Schritt ist die Bestimmung des Vakuumfeldes im Zylinder und man erhält dafür:

$$u_v = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^N (c_i^k \cos k\phi + d_i^k \sin k\phi) J_k\left(\frac{x_{ki}\rho}{R_m}\right) e^{-x_{ki}z/R_m} \quad (3.67)$$

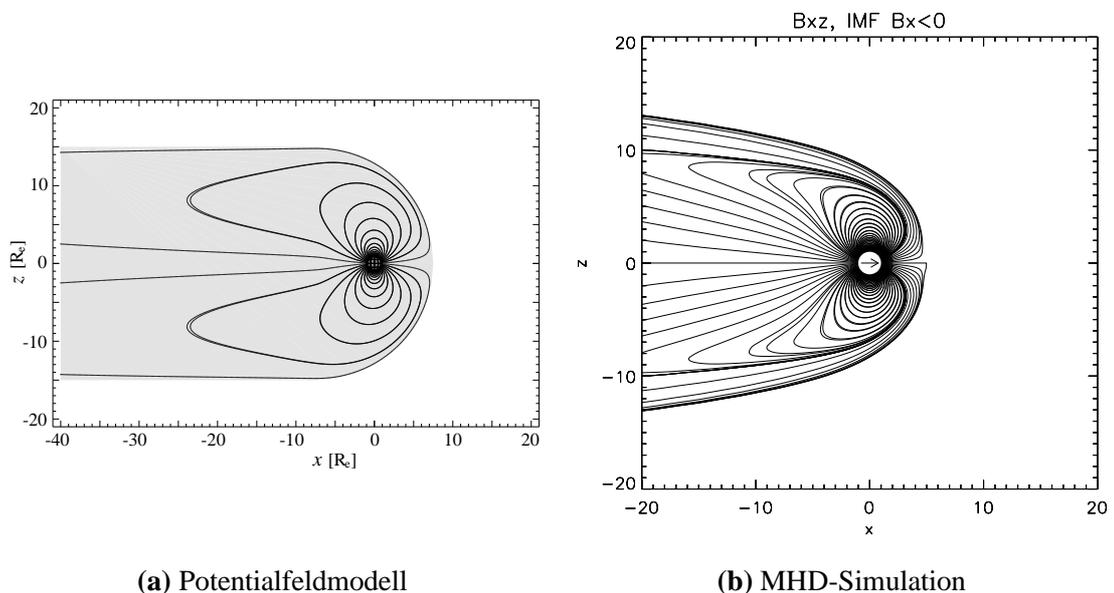
Um die Koeffizienten  $c_i^k$  und  $d_i^k$  herzuleiten, wird ausgenutzt, daß das Potential an der Schnittfläche zwischen Zylinder und Halbkugel stetig sein soll. Das Magnetfeld der

Schweifströme wird analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.6 konstruiert. Die Herleitung der Chapman-Ferraro-Ströme außerhalb der Magnetopause erfolgt genau wie in Abschnitt 3.7, denn dabei geht nicht das innere Feld der Erde ein, sondern lediglich das interplanetare Magnetfeld.

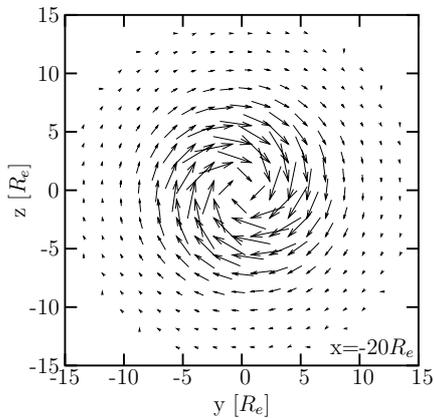
### 3.11. Vergleich mit MHD-Simulationen

Um einen Eindruck zu gewinnen, wie realistisch die Magnetosphären Darstellungen sind, die mit dem hier vorgestellte Potentialfeldmodell berechnet wurden, werden die Ergebnisse mit MHD-Simulationen von Vogt et al. (2004) und Zieger et al. (2004) verglichen.

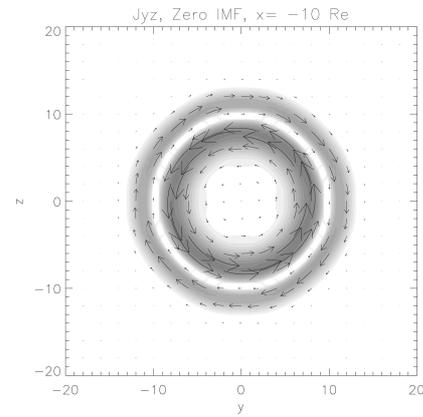
Gewählt wurde dazu der Pole-on-Dipol mit  $c_1^1 = 30000$  nT in einer geschlossenen Magnetosphäre und gestreckten Feldlinien ( $\lambda = 0.15$ ). Der Betrag dieser Feldstärke entspricht dem heutigen Wert. Die Größe der Magnetosphäre im Potentialfeldmodell wurde so gewählt, daß sie auf der Magnetopause das Druckgleichgewicht zwischen dem Sonnenwind und dem Erdmagnetfeld erfüllt, so wie es auch in Abschnitt 4.2 beschrieben wird. Wie in Abbildung 3.6a zusehen ist, stimmt die so berechnete Größe der Magnetsphäre recht gut mit den numerischen Simulationen in Abbildung 3.6b überein. Die Form der Magnetosphäre wird im Potentialfeldmodell durch einen Zylinder beschrieben, der auf der Tagseite durch eine Halbkugel abgeschlossen wird. Dies ist eine gute Annäherung an die Form der Magnetosphäre, die sich aus den numerischen



**Abbildung 3.6.:** Vergleich des Potentialfeldmodells mit MHD-Simulationen (Zieger, persönliche Mitteilung, 2004) am Beispiel der Feldlinien eines Pole-on-Dipols.



(a) Potentialfeldmodell



(b) MHD-Simulation

**Abbildung 3.7.:** Vergleich des Potentialmodell mit MHD-Simulationen (Zieger, persönliche Mitteilung, 2004) am Beispiel des Schweifstromes eines Pole-on-Dipols.

Simulationen ergeben.

In Abschnitt 3.6 wurde der Einfluß der Schweifströme auf das Magnetfeld im Magnetosphärenschweif gezeigt. Um im Potentialfeldmodell den Feldlinienverlauf im Schweif an die Ergebnisse der numerischen Simulationen anzupassen, wurden die Feldlinien mit einem Faktor von  $\lambda = 0.15$  gestreckt. Auf der Tagseite werden die Feldlinien komprimiert, während sie auf der Nachtseite in den Schweif hinein gestreckt werden. Dabei werden im Schweif zwei Schweiflappen in je einer Hemisphäre ausgebildet (Abbildung 3.6).

Durch die Streckung der Feldlinien im Schweif wird eine kreisförmige Stromverteilung erzeugt, wie in Abbildung 3.7a zu sehen ist. Die Struktur des Schweifstromes wird in diesem Beispiel von dem Potentialfeldmodell wiedergegeben, nicht aber die Richtung der Ströme im Einzelnen. So sind in der numerischen Simulation (Abbildung 3.7b) zwei ringförmige Ströme mit entgegengesetzter Richtung zu erkennen, während im Potentialfeldmodell (Abbildung 3.7a) nur eine Richtung des Ringstromes vorliegt.

### *3. Erweiterung des Voigtschen Magnetosphärenmodells*

---

## 4. Magnetfelder und Feldlinien

Dieses Kapitel gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil behandelt technische Fragen wie die Berechnung und Darstellung der Magnetfeldlinien (Abschnitt 4.1), die Bestimmung der geometrischen Parameter der Magnetosphäre (Abschnitt 4.2) und die Möglichkeit zur Skalierung des Magnetosphärenmodells (Abschnitt 4.3). Der zweite Teil zeigt Anwendungen des Magnetfeldmodells auf verschiedene mögliche Paläomagnetfeldkonfigurationen und eine Abschätzung der Schweifströme für diese Konfigurationen (Abschnitt 4.4).

### 4.1. Berechnung und Darstellung der Magnetfeldlinien

Jede Feldlinie läßt sich durch eine Kurve  $\underline{C}$  darstellen. Die jeweilige Tangente in einem Punkt der Kurve entspricht dem Magnetfeldvektor  $\underline{B}$  in diesem Punkt, es ist also

$$\underline{B} = \frac{d\underline{C}}{ds}, \quad (4.1)$$

wobei  $d/ds$  die Ableitung entlang der Kurve ist. Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung und kann z. B. durch ein Runge-Kutta-Verfahren gelöst werden. Als Lösung ergibt sich dann die Kurve  $\underline{C}$ .

Der einfachste Spezialfall des Runge-Kutta-Verfahrens (siehe Böhm und Gose, 1977; Stoer und Bulirsch, 1978) zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung ist das Euler-Verfahren. Es handelt sich hierbei um ein sogenanntes Einschrittverfahren. Die Differentialgleichung wird durch einen Differenzenquotienten ersetzt und nach der gesuchten Größe aufgelöst:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{C}}{ds} &= \frac{\underline{C}_{i+1} - \underline{C}_i}{\Delta s} = \underline{B}(\underline{C}_i, s_i) \\ \Rightarrow \underline{C}_{i+1} &= \underline{C}_i + \Delta s \cdot \underline{B}(\underline{C}_i, s_i), \end{aligned} \quad (4.2)$$

wobei  $\Delta s = s_{i+1} - s_i$  ist. Bei vorgegebener Anfangsbedingung  $\underline{C}_0 = \underline{C}(s_0)$  läßt sich durch Anwendung der Gleichung (4.2) die gesamte Kurve  $\underline{C}$  bestimmen.

Gegen das Euler-Verfahren spricht, daß es nicht sehr genau und auch nicht sehr stabil ist. Besser geeignet sind deshalb Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung, bei denen Fehlerkorrekturterme miteinbezogen werden (siehe Press, 1992; Stoer und Bulirsch,

1978). Für die höheren Ordnungen werden noch Punkte zwischen  $s_{i+1}$  und  $s_i$  zur Berechnung mit herangezogen. So ergibt sich für das Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung, auch Zwischenpunktverfahren genannt:

$$\underline{C}_{i+1} = \underline{C}_i + \underline{k}_2, \quad (4.3)$$

$$\underline{k}_1 = \Delta s \cdot \underline{B}(\underline{C}_i, s_i), \quad (4.4)$$

$$\underline{k}_2 = \Delta s \cdot \underline{B}\left(\underline{C}_i + \frac{\underline{k}_1}{2}, s_i + \frac{\Delta s}{2}\right). \quad (4.5)$$

Entsprechend kann man auch noch höhere Ordnungen konstruieren. Höhere Ordnung heißt nicht automatisch auch höhere Genauigkeit, aber Erfahrungen haben gezeigt, daß das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung in vielen Fällen besser ist als das zweiter Ordnung (Press (1992)).

## 4.2. Bestimmung der geometrischen Magnetosphärenparameter

Zur kurzen Erinnerung seien hier die Parameter aufgelistet, die in die Magnetosphärenmodelle aus Kapitel 3 eingehen: das Magnetfeld des Planeten, gegeben durch das Dipolmoment  $\underline{m}$  und das Quadrupolmoment  $\underline{Q}$  bzw. durch die Gaußkoeffizienten bis zum zweiten Grad, der Schweifradius  $R_m$  und die Standoffdistanz  $R_s$ .

Für heutige Felder sind diese Parameter aus Beobachtungen und Satellitenmessungen bekannt. Doch wie sind die Parameter zu wählen, wenn man das magnetosphärische Magnetfeld für eine Paläosituation betrachten möchte? Über mögliche Konfigurationen für das magnetische Moment bzw. die Gaußkoeffizienten wurden bereits in Abschnitt 2.4 Überlegungen dazu angestellt. Als schwierig erweist es sich hingegen, Angabe für den Schweifradius und die Standoffdistanz zu finden, denn es kann hierbei auf keinerlei Messungen zurückgegriffen werden.

Die Magnetosphäre resultiert aus der Wechselwirkung zwischen dem Planetenmagnetfeld und dem Sonnenwind, wobei die Größe der Magnetosphäre, die durch den Schweifradius und die Standoffdistanz charakterisiert sind, so bestimmt ist, daß ein Druckgleichgewicht zwischen dem Druck auf der Innenseite und dem Druck auf der Außenseite der Magnetosphäre herrscht.

Im einfachsten Fall wird das Druckgleichgewicht durch

$$knmv_{sw,\perp}^2 + p_0 = \frac{B_{mp}^2}{2\mu_0} \quad (4.6)$$

beschrieben mit  $n$  der Teilchendichte des Sonnenwindes,  $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg der Masse eines Sonnenwindteilchens (hier als Proton angenommen) und  $v_{sw,\perp} = 400$  km/s der zur Magnetopause senkrechten Komponente seiner Geschwindigkeit. In einer planaren Magnetosphäre ist  $k = 1$ , in einer sphärischen gilt  $k = 1.5$ . Aus gasdynamischen

Berechnungen kann man  $k = 0.88$  herleiten (Prölss, 2001).  $B_{mp}^2$  ist das Magnetfeld auf der Magnetopause, daß abhängig ist von  $R_m$  und  $R_s$ . Die Größe  $p_0$  beschreibt den thermischen Druck und nach Kertz (1992) gilt ungefähr  $p_0 = 0.052p_s = 0.052 \cdot 2nmv_{sw,\perp}^2$ . Die Bestimmung der Magnetopausenform und -größe wurde in den 50er Jahren als das exakte Chapman-Ferraro-Problem formuliert. Mead und Beard (1964) und Choe et al. (1973) lösten diese Aufgabe für das Erdmagnetfeld durch Auswertung des Druckgleichgewichts an der Magnetopause. Starchenko und Shcherbakov (1991) hingegen widmeten sich der Bestimmung der Magnetopause eines Pole-on-Dipols. Die meisten dieser Berechnungen beschränken sich allerdings auf zwei Dimensionen. Eine realistische Beschreibung liefern numerische Simulationen, wie sie unter anderem bei Vogt et al. (2004) und Zieger et al. (2004) zu finden sind.

Die Halbkugel, die die Magnetopause auf der sonnenzugewandten Seite beschreibt, ist nur eine grobe Näherung der wahren, durch das Druckgleichgewicht gegebenen Magnetopausenform. Deshalb wird auf ihr das Druckgleichgewicht auch nicht an allen Orten gegeben sein. Durch numerische Betrachtungen und Variation der Parameter läßt sich die beste Lösung finden. Vorausgesetzt wird hierbei, daß die Sonnenwindparameter über die Zeit hinweg konstant bleiben.

Eine grobe Abschätzung der Standoffdistanz liefert die folgende Betrachtung. Der Einfachheit halber wird auf die sphärische Magnetopause (Abschnitt 2.6.3.1) anstelle der zylindrischen zurückgegriffen. Eine weitere vereinfachte Annahme wird gemacht, indem man die Erde so dreht, daß  $\lambda = \lambda_n^m$  gilt. Auf der Magnetopause gibt es keine Radialkomponente und nach den Gleichungen (2.39) fällt wegen  $\lambda = \lambda_n^m$  die azimutale Komponente auch weg, somit ist  $B = B_\vartheta$ . Für einen einzelnen Multipol ergibt sich dann

$$B_{mp} = c_n^m \left( \frac{R_e}{r_{mp}} \right)^{n+2} \frac{2n+1}{n} \left| \frac{d}{d\vartheta} P_n^m(\cos \vartheta) \right|. \quad (4.7)$$

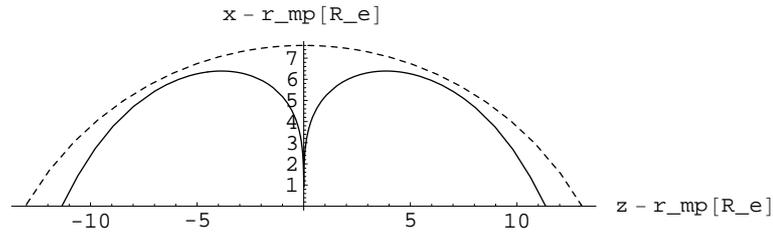
Setzt man diesen Ausdruck nun in Gleichung (4.6) und löst nach  $r_{mp}$  auf, so erhält man den Abstand der Erde zur Magnetopause in Abhängigkeit vom Polwinkel:

$$r_{mp} = R_e \sqrt[n+2]{\frac{2n+1}{n} \frac{c_n^m}{\sqrt{2\mu_0(2nmv_{sw,\perp}^2 + p_0)}} \left| \frac{d}{d\vartheta} P_n^m(\cos \vartheta) \right|} \quad (4.8)$$

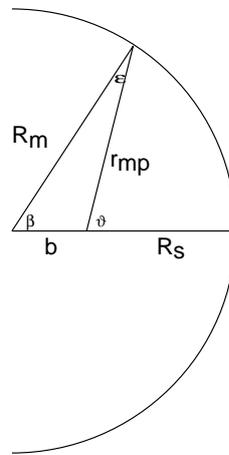
Für einen zonalen Dipol entspricht  $r_{mp}(\vartheta = 90^\circ)$  der Standoffdistanz. Da das Magnetfeld mit zunehmendem Grad  $n$  schneller abfällt als ein Dipolfeld, ist die entsprechende Standoffdistanz eines höheren Multipols bei gleichem Wert für  $c_n^m$  kleiner.

Die durchgezogene Linie in Abbildung 4.1 zeigt den Abstand der Erde zur Magnetopause in Abhängigkeit vom Winkel für einen Pole-on-Dipol ( $c_1^1 = 30000$  nT), der durch Gleichung (4.8) gegeben ist. Gesucht ist nun ein Halbkreis, wie er auf der Tagseite des zylindrischen Modells verwendet wird, der sich möglichst gut an diese Kurve anschmiegt. Abbildung 4.2 verdeutlicht die geometrischen Beziehungen in der Halbkugel. Nach dem Kosinussatz gilt

$$r_{mp,2}^2 = b^2 + R_m^2 - 2R_m b \cos \beta = (R_m - r_s)^2 + R_m^2 - 2R_m(R_m - r_s) \cos \beta. \quad (4.9)$$



**Abbildung 4.1.:** Abstand der Magnetopause zur Erde in Abhängigkeit vom Polwinkel  $\vartheta$ . Durchgezogene Linie: Magnetopausenform berechnet nach Gleichung (4.8). Gestrichelte Linie: Angepaßter Halbkreis für das zylindrische Modell.



**Abbildung 4.2.:** Geometrische Beziehungen in der Halbkugel.

Mit Hilfe des Sinussatzes

$$\frac{R_m}{\sin(180^\circ - \vartheta)} = \frac{b}{\sin \epsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_m}{\sin \vartheta} = \frac{R_m - r_s}{\sin(\vartheta - \beta)} \quad (4.10)$$

bestimmt man den Winkel  $\beta$  zu

$$\beta = \vartheta - \arcsin\left(\frac{R_m - R_s}{R_m} \sin \vartheta\right). \quad (4.11)$$

Die Parameter  $R_m$  und  $R_s$  werden nun solange variiert, bis sich die daraus resultierende Kurve  $r_{mp,2}(\vartheta)$  dem Abstand der Erde  $r_{mp}(\vartheta)$  zur Magnetopause annähert. Die gestrichelte Linie in Abbildung 4.1 zeigt die Anpassung.

Die so bestimmten Werte  $R_m$  und  $R_s$  stimmen recht gut mit den skalierten Werten aus dem folgenden Abschnitt 4.3 überein. Wie in Abschnitt 4.4 zu sehen sein wird, ist auch eine Übereinstimmung mit den Simulationen von Vogt et al. (2004) und Zieger et al. (2004) gegeben.

### 4.3. Skalierung der magnetosphärischen Magnetfelder

Schaut man sich die magnetischen Feldlinien an (Abbildung 4.3), so liegt die Vermutung nahe, daß bei einer größeren Wahl der Multipolmomente auch die Abmessungen der Magnetopause größer werden, sich aber der relative Verlauf der Magnetfeldlinien innerhalb der Magnetosphäre nicht ändert. Diese Skalierbarkeit und Ähnlichkeit der Magnetfelder soll in diesem Abschnitt untersucht werden.

Dazu werden die drei Magnetfeldmodelle, als da wären die Multipolentwicklung, die sphärische und die zylindrische Magnetosphäre, getrennt von einander untersucht.

#### Multipolentwicklung

Das Magnetfeld einer Multipolentwicklung ist lediglich durch die Gaußkoeffizienten  $c_n^m$  parametrisiert. Beschrieben wird es durch eine Kugelfunktionsentwicklung, wie sie in den Gleichungen (2.13) angegeben ist. Es sei nun  $\underline{B}_0$  mit den Gaußkoeffizienten  $c_{n,0}^m$  das Ausgangsfeld. Gesucht wird das skalierte Feld  $\underline{B}$  mit den Koeffizienten  $c_n^m$ . Da die Gaußkoeffizienten linear in die Magnetfeldkomponenten  $B_{0,i}$  eingehen, ist

$$B_i(r, \vartheta, \lambda) = c B_{0,i}(r, \vartheta, \lambda) \quad \text{mit} \quad c_n^m = c \cdot c_{n,0}^m. \quad (4.12)$$

Der Index  $i$  bezeichnet hierbei die drei Komponenten  $B_r, B_\vartheta, B_\lambda$ . Somit gilt die Skalierungsrelation für den gesamten Vektor des Magnetfeldes.

#### Sphärische Magnetosphäre

In der sphärischen Magnetosphäre (Abschnitt 2.6.3.1) wird das Magnetfeld zusätzlich zu den Gaußkoeffizienten  $c_n^m$  noch durch den Magnetosphärenradius  $R_m$  bestimmt, siehe Gleichungen (2.39). Wie oben gezeigt, geht auch hier das Moment linear in das Modell ein und es ist somit  $B_i = c B_{0,i}$ . Zu untersuchen ist nun der Einfluß des Magnetosphärenradius  $R_m$ . Schreibt man die Magnetfeldkomponenten für jeweils einen festen Grad  $n$  auf und führt dabei die dimensionslose Größe  $\tilde{r} = r/R_m$  ein, dann ist

$$B_i(\tilde{r}, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{R_m^{n+2}} B_i(r, \vartheta, \lambda), \quad (4.13)$$

wobei  $B_i$  wiederum die drei Komponenten  $B_r, B_\vartheta, B_\lambda$  bezeichnet. Und somit folgt

$$B_i(\tilde{r}, \vartheta, \lambda) = \frac{c}{d^{n+2}} B_{0,i}(\tilde{r}, \vartheta, \lambda) \quad \text{mit} \quad c_n^m = c \cdot c_{n,0}^m \quad \text{und} \quad R_m = d R_{m,0}. \quad (4.14)$$

Hierbei ist  $n$  der Grad der Multipolordnung, also  $n = 1$  der Dipol und  $n = 2$  der Quadrupol.

#### Zylindrische Magnetosphäre

Die zylindrische Magnetosphäre hat als frei wählbare Parameter die Gaußkoeffizienten  $c_n^m$ , den Magnetosphärenradius  $R_m$  und die Standoffdistanz  $R_s$ . Um die Skalierbarkeit

der zylindrischen Magnetosphäre zu bestimmen, unterteilt man sie in eine Halbkugel auf der Tagseite und einen Zylinder auf der Nachtseite. Unter Einführung der dimensionslosen Größe  $\tilde{r} = r/R_m$  kann man wie bei der sphärischen Magnetosphäre zeigen, daß in der Halbkugel für die drei Magnetfeldkomponenten

$$B_i(\tilde{r}, \vartheta, \lambda) = \frac{c}{d^{n+2}} B_{0,i}(\tilde{r}, \vartheta, \lambda) \quad \text{mit} \quad c_n^m = c \cdot c_{n,0}^m, R_m = d \cdot R_{m,0}, \frac{R_s}{R_m} = \text{const} \quad (4.15)$$

gilt. Um eine Beziehung für den Zylinder herzustellen, braucht man zwei weitere dimensionslose Größen, und zwar  $\tilde{\rho} = \rho/R_m$  und  $\tilde{z} = z/R_m$ . Damit erhält man dann

$$B_i(\tilde{\rho}, \phi, \tilde{z}) = \frac{c}{d^{n+2}} B_{0,i}(\tilde{\rho}, \phi, \tilde{z}) \quad \text{mit} \quad c_n^m = c \cdot c_{n,0}^m, R_m = d \cdot R_{m,0}, \frac{R_s}{R_m} = \text{const}. \quad (4.16)$$

Bei diesen beiden Beziehungen wurde vorausgesetzt, daß  $R_s/R_m$  konstant ist. Somit ist die Standoffdistanz  $R_s$  als Parameter nicht mehr länger frei wählbar, sondern an den Magnetosphärenradius  $R_m$  gekoppelt. Mit Vogt und Glassmeier (2001) kann für einen zonalen Dipol gezeigt werden, daß  $R_s/R_m = \text{const}$  ist.

**Zusammenfassend** läßt sich sagen:

$$\underline{B} = \frac{c}{d^{n+2}} \underline{B}_0 = \frac{c_n^m / c_{n,0}^m}{(R_m/R_{m,0})^{n+2}} \underline{B}_0, \quad (4.17)$$

wobei das Magnetfeld  $\underline{B}$  von dimensionslosen Größen (normiert auf den Magnetopausenradius) abhängt, statt von reellen Ortskoordinaten. Voraussetzung ist allerdings, daß sich die Magnetfeldkonfiguration nicht ändert. Betrachtet man z. B. als Ausgangsfeld einen zonalen Dipol, so gelten die Skalierungen und Ähnlichkeiten auch nur für ein zonales Dipolfeld, und somit nicht für einen anderen Multipol. Man kann also keine Skalierungsrelationen zwischen unterschiedlichen Multipolmomenten herstellen. Auch lassen sich Kombinationen mit Multipolmomenten unterschiedlichen Grades nicht skalieren.

Interessant werden diese Skalierungen, wenn man unterschiedliche Paläomagnetfeldstärken einer Konfiguration betrachten möchte. Geht man davon aus, daß sich die Sonnenwindparameter nicht geändert haben, dann bleibt der Sonnenwinddruck konstant und damit auch der Betrag des Magnetfeldes auf der Magnetopause (näheres hierzu in Kapitel 4.2). Dann muß nach Gleichung (4.17) für alle Skalierungen

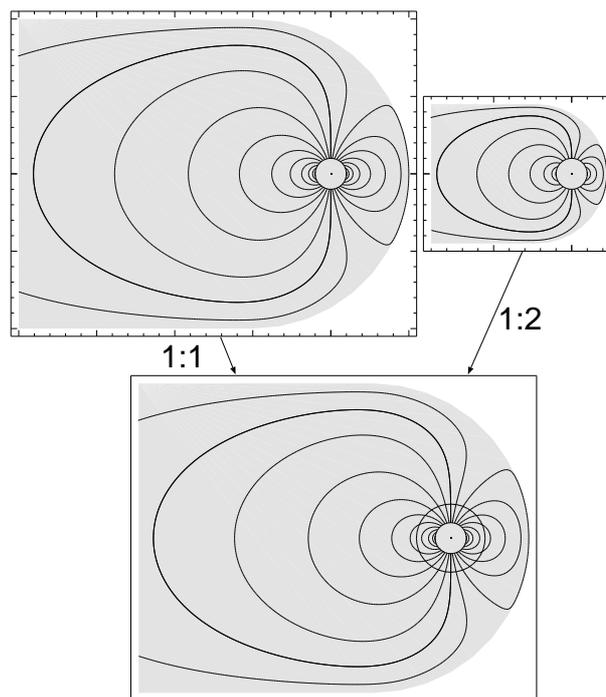
$$\frac{c}{d^{n+2}} = \frac{c_n^m / c_{n,0}^m}{(R_m/R_{m,0})^{n+2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad R_m = R_{m,0} \sqrt[n+2]{\frac{c_n^m}{c_{n,0}^m}} \quad (4.18)$$

gelten. Das heißt also für einen Multipol vom Grad  $n$ , der im Vergleich zu einem anderen halb so groß ist, ist der Magnetosphärenradius um den Faktor  $\sqrt[n+2]{2}$  kleiner. Bei gleichem relativen  $\tilde{r} = r/R_m$  sind also Magnetfelder gleicher Größe und Richtung zu finden. Was sich nicht ändert, ist der Erdradius. Aber für jede Skalierungsrelation, gibt

es ein anderes  $\tilde{r}_e = R_e/R_m$ , so daß sich die Erdoberfläche nicht mit skaliert und somit relativ zur Magnetosphäre ändert. Deshalb sind auch jeweils andere Magnetfelder an der Erdoberfläche zu erwarten.

Abbildung 4.3 verdeutlicht die Skalierung für einen zonalen Dipol. Auf der linken Seite oben ist die Magnetosphäre dargestellt für ein inneres Feld der Stärke  $c_1^0 = c_{1,0}^0$ , rechts daneben für ein Feld der Stärke  $c_1^0 = 0.1c_{1,0}^0$ . Die Größen der Magnetosphären unterscheiden sich um einen Faktor von ungefähr zwei. Vergrößert man nun die linke Magnetosphäre um den Faktor eins und die rechte um den Faktor zwei, so erkennt man (unterer Teil der Abbildung 4.3), daß der relative Verlauf der Feldlinien in beiden Fällen gleich ist. Die Radien der Kugel, die jeweils die Erde symbolisiert, werden ebenfalls mit der Magnetopause mitskaliert und ändern sich somit entsprechend in Bezug auf die Größe der Magnetosphäre. Der kleine Radius entspricht dem Fall einer Feldstärke mit  $c_1^0 = c_{1,0}^0$ , der große dem Fall von  $c_1^0 = 0.1c_{1,0}^0$ .

Im folgenden sollen für drei verschiedene Konfigurationen (zonaler Dipol, Pole-on-Dipol, zonaler Quadrupol) für unterschiedlich große Momente die Magnetosphärenparameter  $R_s$  und  $R_m$  bestimmt werden. Die Magnetopausenparameter für das jeweils



**Abbildung 4.3.:** Skalierte Magnetfeldlinien für zonale Dipolfelder unterschiedlicher Feldstärke. Normiert man die Abmaße der Magnetosphäre auf den Magnetosphärenradius  $R_{m,0}$ , so lassen sich die Abbildungen für unterschiedliche Feldstärken in einer zusammenfassen. Lediglich der relative Erdradius verändert sich. Der kleine Radius entspricht dem mit einer Feldstärke mit  $c_n^m = c_{n,0}^m$ , der größere  $c_n^m = 0.1c_{n,0}^m$ .

größte Moment einer Konfiguration wurden über das Druckgleichgewicht bestimmt, wie es in Abschnitt 4.2 gezeigt wurde. Alle anderen Parameter wurden aus der Skalierung (4.18) berechnet. Dabei wurde vorausgesetzt, daß  $R_m/R_s = \text{const} = 2$  ist. In Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse zusammengefaßt.

Zonaler Dipol			
$c_1^0$ [nT]	$R_m[R_e]$	$R_s[R_e]$	$\tilde{r}_e = R_e/R_m$
30000	20	10.0	0.050
25000	18	9.0	0.056
20000	16	8.0	0.063
10000	15	7.5	0.077
5000	10	5.0	0.100
Pole-on-Dipol			
$c_1^1$ [nT]	$R_m[R_e]$	$R_s[R_e]$	$\tilde{r}_e = R_e/R_m$
30000	15	7.5	0.067
25000	14	7.0	0.071
20000	13	6.5	0.077
10000	10	5.0	0.100
5000	8	4.0	0.125
Zonaler Quadrupol			
$c_2^0$ [nT]	$R_m[R_e]$	$R_s[R_e]$	$\tilde{r}_e = R_e/R_m$
24500	9.5	4.75	0.105
20000	9.0	4.50	0.111
10000	7.5	3.75	0.133
5000	6.5	3.25	0.154

**Tabelle 4.1.:** Geometrische Magnetopausenparameter für verschiedene Konfigurationen und Feldstärken.

Ein Vergleich mit den Berechnungen der Magnetopausengröße mittels des Magnetopausengleichgewichts (Abschnitt 4.2) zeigt recht gute Übereinstimmungen.

Skalierungsrelationen für den zonalen Dipol  $c_1^0$  wurden bereits früher von Siscoe und Chen (1975), Siebert (1977) und Vogt und Glassmeier (2001) aufgestellt. Sie entsprechen den obigen Ergebnissen.

In Griebmeier et al. (2004) wird gezeigt, wie sich die Sonnenwindparameter im Laufe der Erdgeschichte geändert haben. Anstelle der Eins in Gleichung (4.18) steht ein Faktor  $s$ , der die Änderung der Sonnenwindparameter zusammenfaßt. Der Magnetopausenradius skaliert dann mit

$$R_m = R_{m,0} \sqrt[n+2]{\frac{C_n^m}{s C_{n,0}^m}}. \quad (4.19)$$

Allerdings gilt nun  $B_i(\tilde{\rho}, \phi, \tilde{z}) = s B_{0,i}(\tilde{\rho}, \phi, \tilde{z})$ . Die Felder sind also nicht mehr gleich an den relativ gleichen Positionen  $\tilde{\rho}, \phi, \tilde{z}$ . Dieser Ansatz sei hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt und wird nicht weiter verfolgt.

## 4.4. Mögliche Paläomagnetfelder

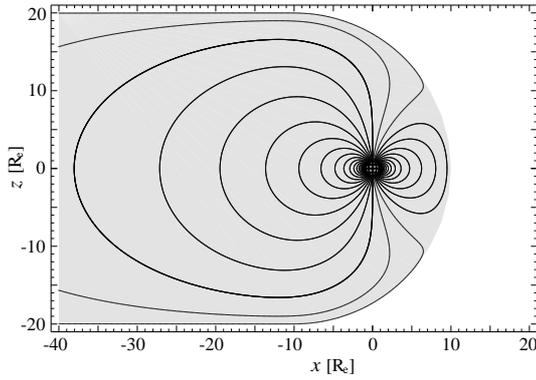
In Abschnitt 2.4 wurden bereits mögliche Konfigurationen für Paläomagnetfelder vorgestellt. Ein einfaches Szenario einer Feldumkehrung ist der schwächer werdende Dipol, bei dem das Dipolmoment abnimmt und sich nach einem Nulldurchgang in umgekehrter Richtung wieder aufbaut. Saito et al. (1978) schlagen ein Umkehrungsszenario vor, bei dem der Dipol umklappt. Ein bei diesem Szenario interessanter Fall ist die Pole-on-Konfiguration, bei der der Dipol zur Sonne hin zeigt. Etwas komplexer, aber auch realistischer sind die Ansätze von Biernat et al. (1985) und Leubner und Zollner (1985), bei denen während der Magnetfeldumkehrung höhere Multipole eine Rolle spielen. Auf Grund all dieser Ansätze und Überlegungen wird in den nächsten Abschnitten näher auf verschiedene Dipol- und Quadrupolkonfigurationen eingegangen. Zunächst werden anschauliche Spezialfälle, wie der zonale Dipol, der Pole-on-Dipol und der zonale Quadrupol sowie eine Zusammensetzung von Dipol und Quadrupol betrachtet. Im Anschluß daran wird eine numerische Simulation von Glatzmaier (persönliche Mitteilung, 2003) untersucht. Dargestellt werden die Feldlinienverläufe für die verschiedenen Konfigurationen sowie die Schweifströme, die sich bei Streckung der Schweiffeldlinien ergeben. Soweit es möglich ist, werden die Ergebnisse der Modellrechnung mit numerischen Simulationen von Vogt et al. (2004) und Zieger et al. (2004) verglichen.

### 4.4.1. Zonaler Dipol

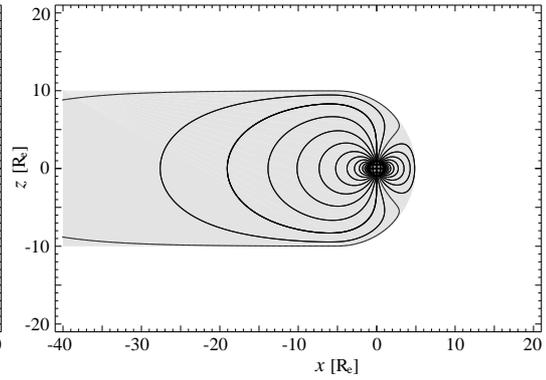
Der zonale Dipol  $c_1^0$  entspricht einer Idealisierung des heutigen Dipols. Bei dieser Konfiguration steht die Dipolachse senkrecht zur Verbindungslinie Sonne-Planet. Sie ist also entlang der  $z$ -Achse im GSE-Koordinatensystem ausgerichtet. Die magnetischen Pole fallen mit den geographischen Polen zusammen. Das Magnetfeld ist maximal an den Polen und minimal am Äquator. Charakteristisch für die Magnetfeldlinien des zonalen Dipols ist die Symmetrie bezüglich der Rotationsachse der Erde, deren Neigung hier vernachlässigt werden soll. Erst durch die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit dem Erdmagnetfeld wird diese Symmetrie gebrochen. Die Magnetfeldlinien auf der sonnenzugewandten Seite werden gestaucht, während die Feldlinien auf der entgegengesetzten Seite gestreckt werden und somit den Magnetosphärenschweif bilden. Die Schweiffeldlinien bilden einen sogenannten Schweiflappen.

Die Parameter für den zonalen Dipol sind heutigen Beobachtungen entnommen und idealisiert worden:  $c_1^0 = 30000 \text{ nT}$ ,  $R_m = 20R_e$  und  $R_s = 10R_e$ . Für kleinere Magnetfelder wurde die Größe der Magnetosphäre  $R_m$  durch die Skalierungsrelation (4.18) gewonnen, wobei das heutige Verhältnis  $R_s = R_m/2$  beibehalten wurde. Vergleiche

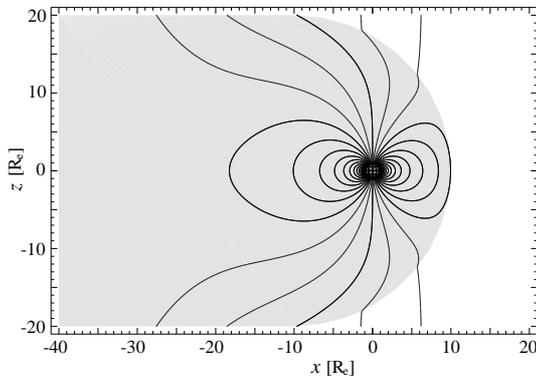
#### 4. Magnetfelder und Feldlinien



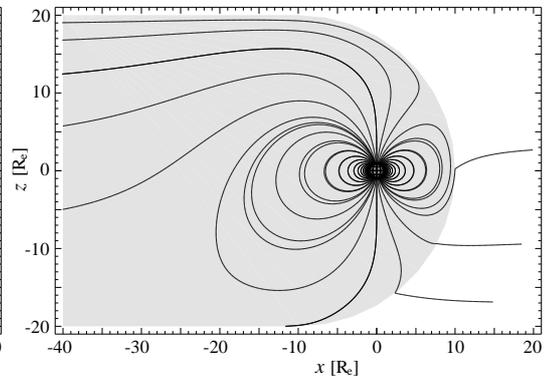
(a) Geschlossene Magnetosphäre,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 1$ .



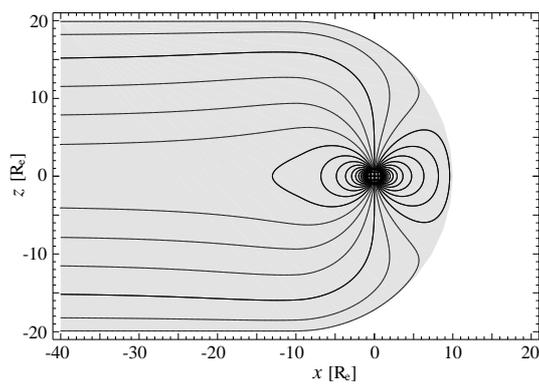
(b) Geschlossene Magnetosphäre,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c_1^0 = 5000$  nT.



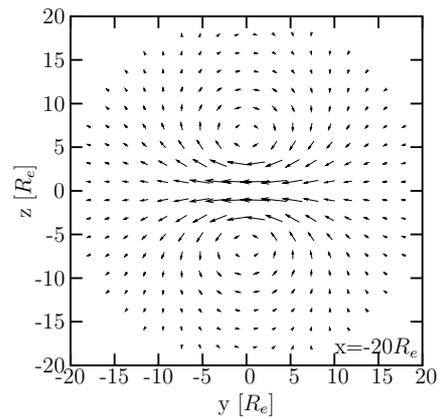
(c) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  senkrecht zu  $x$ ,  $\lambda = 1$ .



(d) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  parallel zu  $x$ ,  $\lambda = 1$ .



(e) Feld mit Schweifströmen,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 0.15$ .



(f) Schweifstrom in der  $yz$ -Ebene bei  $x = -20R_e$ , Parameter wie in e.

**Abbildung 4.4.:** Feldlinien und Schweifströme eines zonalen Dipols der Stärke  $c_1^0 = 30000$  nT (außer bei b).

mit Berechnungen aus Abschnitt 4.2 und numerischen Simulationen von Zieger et al. (2004) zeigen, daß dies gerechtfertigt ist.

Abbildungen 4.4a und b zeigen die Feldlinienverläufe für eine geschlossene Magnetosphäre, einmal für ein inneres Dipolfeld der heutigen Stärke von  $c_1^0 = 30000$  nT und für ein schwaches Feld von  $c_1^0 = 5000$  nT. Die Magnetosphären unterscheiden sich in ihrer Größe ungefähr um einen Faktor von zwei (siehe auch Tabelle 4.1), aber der relative Verlauf der Feldlinien ist in beiden Fällen gleich. In den Cuspreionen an den beiden Polen werden Feldlinien der Tagseite auf die Nachtseite gebeugt. Bei allen Feldlinien handelt es sich um geschlossene Feldlinien.

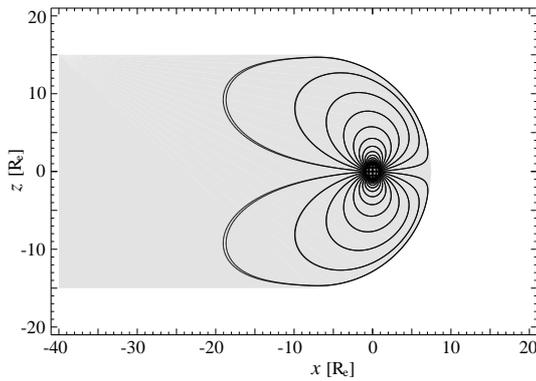
Betrachtet man eine offene Magnetosphäre, so ist der Feldlinienverlauf innerhalb der Magnetosphäre abhängig von der Richtung des interplanetaren Magnetfeldes, wie in den Abbildungen 4.4c und d zu sehen ist. Die Durchlaßrate der Magnetopause mit  $c_i = 0.1$  und  $c_a = 0.9$  wurde bei Voigt (1981) entnommen. Ist das interplanetare Magnetfeld senkrecht zur  $x$ -Achse (Abbildung 4.4c), dann ändert sich der Feldlinienverlauf im Schweif stärker als auf der Tagseite. Dort werden die Feldlinien nahe der Magnetopause „aufgebrochen“ und gehen in die Feldlinien des interplanetaren Feldes über. Auch im Schweif werden die Feldlinien aufgebrochen und nach oben bzw. nach unten gekrümmt. Ist das interplanetare Magnetfeld parallel zur  $x$ -Achse im GSE-Koordinatensystem, dann werden die Magnetfeldlinien auf der einen Hemisphäre (in Abbildung 4.4d die nördliche) in den Schweif hineingestreckt und auf der anderen Hemisphäre in Richtung der Sonne gelenkt. Die Cuspreionen sind weiterhin an den Polen zu finden.

In den eben beschriebenen Beispielen wurde im Schweif ein Vakuumfeld angenommen ( $\lambda = 1$ ). Bei einer Streckung ( $\lambda = 0.15$ ) der Feldlinien in den Schweif hinein sind die Schweiffeldlinien nicht länger geschlossen, sondern zum Teil auch offen (Abbildung 4.4e). Durch diese Verzerrung entsteht eine Stromverteilung, wie sie in Abbildung 4.4f zu sehen ist. Gut zu erkennen ist die  $\Theta$ -förmige Struktur des Stromes mit dem Schichtstrom in der Äquatorebene, der sich jeweils über symmetrische Ströme in den beiden Hemisphären schließt. Ein Stromverlauf dieser Art ist auch in den numerischen Simulationen von Zieger et al. (2004) zu erkennen.

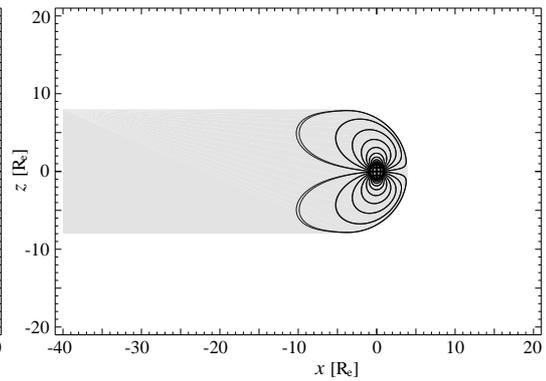
#### 4.4.2. Pole-on-Dipol

Ist der Dipol parallel zur Verbindungsachse Erde-Sonne, also parallel zur  $x$ -Achse im GSE-Koordinatensystem, so spricht man von einer Pole-on-Konfiguration. Dieser Dipol läßt sich durch den Gaußkoeffizienten  $c_1^1$  ausdrücken. Die magnetischen Pole liegen in der Äquatorebene der Erde. Das Magnetfeld ist also minimal auf einem Großkreis, der durch die geographischen Pole geht, und es besitzt zwei Maxima in der Äquatorebene. In dieser Konfiguration befindet sich eine der Cuspreionen auf der sonnenzugewandten Seite, die andere auf der sonnenabgewandten Seite. Die Feldlinien auf der Tagseite werden komprimiert und auf der Nachtseite in den Schweif hineingestreckt. Während beim zonalen Dipol der Schweif nur aus einem Schweiflappen besteht, werden hier nun zwei Lappen ausgebildet, einer auf der nördlichen und einer

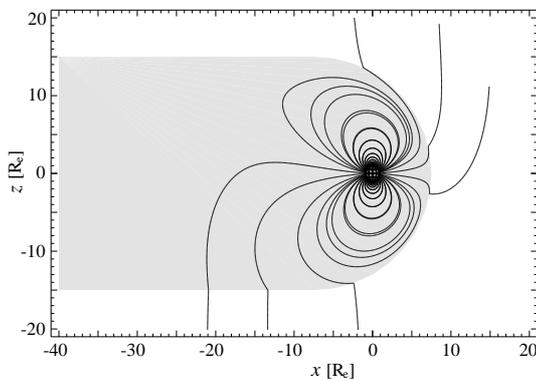
#### 4. Magnetfelder und Feldlinien



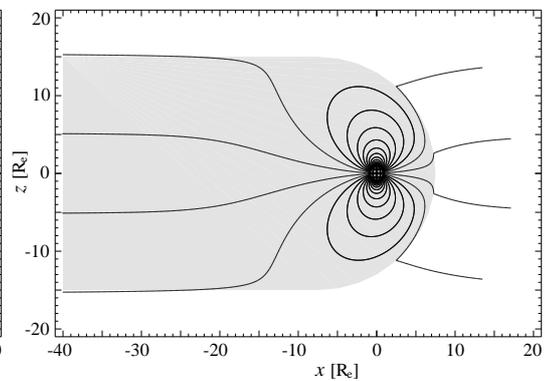
(a) Geschlossene Magnetosphäre,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 1$ .



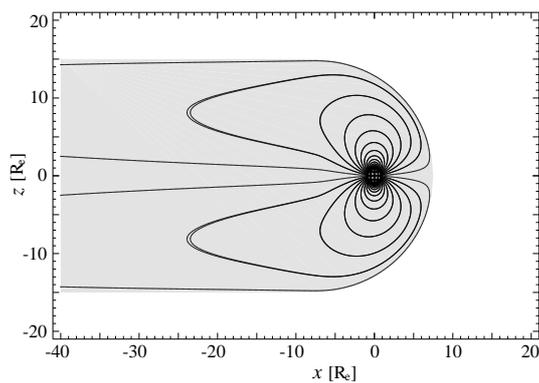
(b) Geschlossene Magnetosphäre,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c_1^1 = 5000$  nT.



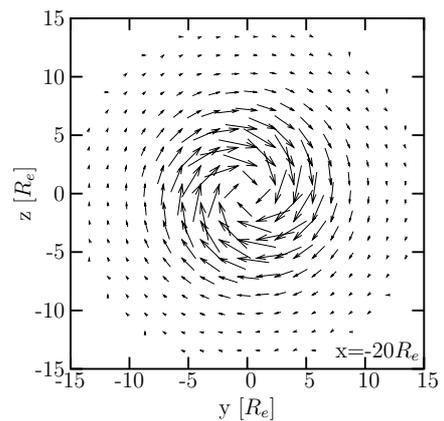
(c) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  senkrecht zu  $x$ ,  $\lambda = 1$ .



(d) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  parallel zu  $x$ ,  $\lambda = 1$ .



(e) Feld mit Schweifströmen,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 0.15$ .



(f) Schweifstrom in der  $yz$ -Ebene bei  $x = -20R_e$ , Parameter wie in e.

**Abbildung 4.5.:** Feldlinien und Schweifströme eines Pole-on-Dipols der Stärke  $c_1^1 = 30000$  nT (außer bei b).

auf der südlichen Halbkugel.

Für die Stärke des Pole-on-Dipols wurde die Stärke des heutigen Feldes verwendet, also  $c_1^1 = 30000$  nT. Nach den Berechnungen aus Abschnitt 4.2 ergeben sich für die Magnetosphärenparameter folgende Werte:  $R_m = 15R_e$  und  $R_s = 7.5R_e$ . Wie bereits im Fall eines zonalen Dipols unterscheiden sich die beiden Größen um einen Faktor von zwei. Für kleinere Magnetfelder wurde die Größe der Magnetosphären  $R_m$  durch die Skalierungsrelation (4.18) gewonnen, wobei das heutige Verhältnis  $R_s = R_m/2$  beibehalten wurde. Vergleiche mit Berechnungen aus Abschnitt 4.2 und numerischen Simulationen von Zieger et al. (2004) zeigen entsprechende Ergebnisse.

Die Abbildungen 4.5a und b zeigen den Größenvergleich der Magnetopause bei einem Feld der Stärke  $c_1^1 = 30000$  nT, und einem schwachen Feld von  $c_1^1 = 5000$  nT. Wie auch aus Tabelle 4.1 zu sehen ist, unterscheiden sich die Magnetosphärengrößen um einen Faktor von knapp zwei.

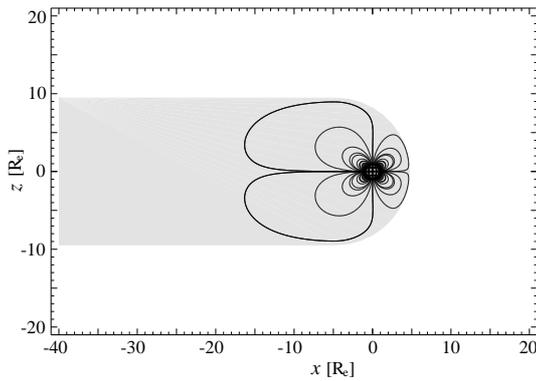
Betrachtet man nun eine offene Magnetosphäre, so muß man die Richtung des interplanetaren Magnetfeldes mit in Betracht ziehen. Bei einem interplanetaren Feld senkrecht zur  $x$ -Achse (Abbildung 4.5c) werden die Feldlinien im Schweif gestaucht und in Richtung des interplanetaren Feldes gelenkt. Auf der Tagseite gehen sie ebenfalls in das interplanetare Magnetfeld über. Im Fall eines parallelen interplanetaren Magnetfeldes (Abbildung 4.5d) werden die äußeren Feldlinien sowohl in der nördlichen als auch in der südlichen Hemisphäre aufgebrochen. Die Feldlinien auf der Nachtseite werden in den Schweif hineingestreckt, auf der Tagseite gehen sie in das interplanetare Feld über. In beiden Fällen wurde wieder  $c_i = 0.1$  und  $c_a = 0.9$  gewählt.

Streckt man die Magnetfeldlinien in den Schweif hinein ( $\lambda = 0.15$ , Abbildung 4.5e), so wird eine Stromverteilung erzeugt, die in der Ebene senkrecht zur Verbindungslinie Erde-Sonne eine kreisförmige Struktur ausbildet (Abbildung 4.5f). Sowohl der Feldlinienverlauf als auch die ringförmige Stromverteilung im Schweif entsprechen den Ergebnissen der numerischen Simulation von Zieger et al. (2004).

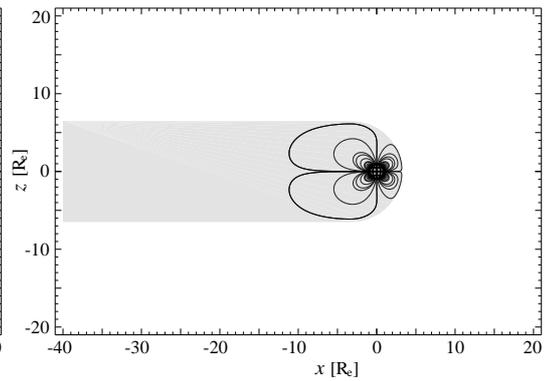
### 4.4.3. Zonaler Quadrupol

Der anschaulichste Fall des Multipols zweiten Grades ist der zonale Quadrupol  $c_2^0$ , der rotationssymmetrisch bezüglich der Rotationsachse der Erde, also der  $z$ -Achse in GSE-Koordinaten, ist. Diese Konfiguration wird bei Vogt und Glassmeier (2000) mit  $\eta = 0$  bezeichnet. Durch den Sonnenwind wird diese Symmetrie zerstört, die Feldlinien auf der Tagseite werden gestaucht, während die auf der Nachtseite in den Schweif hineingestreckt werden. Charakteristisch für diesen Quadrupol ist, daß er am geographischen Nord- und Südpol jeweils einen magnetischen Pol der gleichen Polarität besitzt und am Äquator einen polaren Ring der entgegengesetzten Polarität. Wie bereits beim Pole-on-Dipol werden auch hier im Schweif zwei sogenannte Schweiflappen gebildet. Die Stärke  $c_2^0 = 24500$  nT des Quadrupols ist so gewählt, daß die Energie  $w_2$  des Quadrupols der Energie  $w_1$  eines Dipols der Stärke  $c_1^m = 30000$  nT entspricht. Die Berechnung der Energien und die daraus ergebende Bestimmung des Gaußkoeffizienten  $c_2^0$  erfolgt nach Gleichung (2.31).

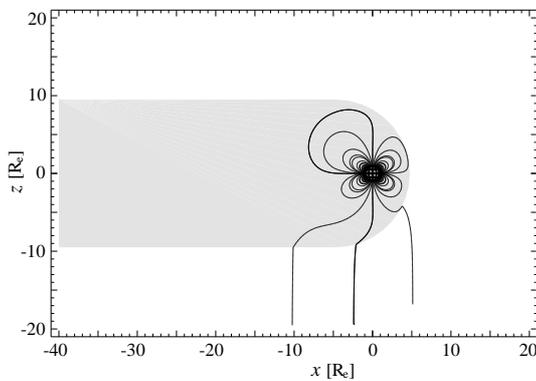
#### 4. Magnetfelder und Feldlinien



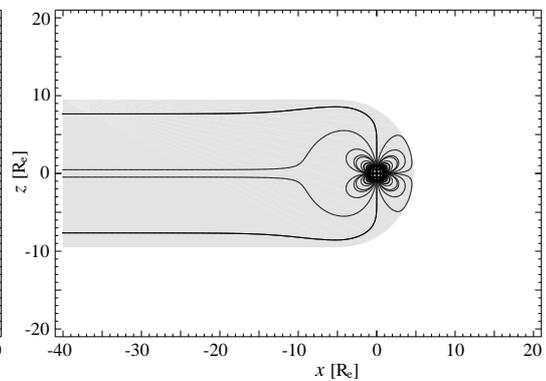
(a) Geschlossene Magnetosphäre,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 1$ .



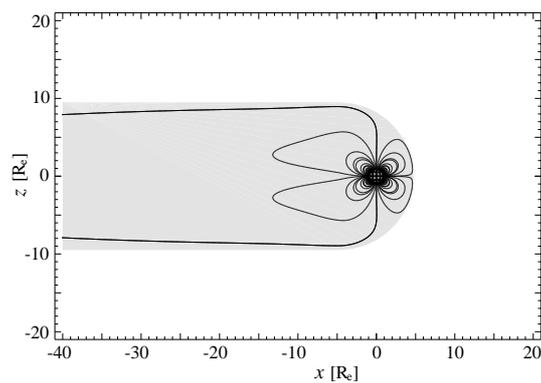
(b) Geschlossene Magnetosphäre,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c_1^1 = 5000$  nT.



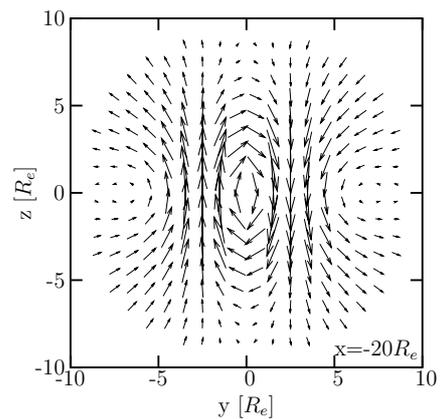
(c) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  senkrecht zu  $x$ ,  $\lambda = 1$ .



(d) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  parallel zu  $x$ ,  $\lambda = 1$ .



(e) Feld mit Schweifströmen,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 0.15$ .



(f) Schweifstrom in der  $yz$ -Ebene bei  $x = -20R_e$ , Parameter wie in e.

**Abbildung 4.6.:** Feldlinien und Schweifströme eines zonalen Quadrupols der Stärke  $c_2^0 = 24500$  nT (außer in b).

Die Abbildungen 4.6a und b zeigen den Feldlinienverlauf in einer abgeschlossenen Magnetosphäre bei einem starken Feld von  $c_2^0 = 24500$  nT und einem schwachen Feld von  $c_2^0 = 5000$  nT. Die Größe der Magnetosphäre ist im Fall des schwachen Feldes um ungefähr ein Drittel kleiner (siehe auch Tabelle 4.1).

Für die offene Magnetosphäre werden wieder die Durchlässigkeitsparameter  $c_i = 0.1$  und  $c_a = 0.9$  gewählt. In den Abbildungen 4.6c und d werden zwei Beispiele von offenen Magnetosphären gezeigt. Ist das interplanetare Magnetfeld wie in Abbildung 4.6c senkrecht zur  $x$ -Achse in GSE-Koordinaten, werden die Feldlinien in der einen Hemisphäre in Richtung des Äquators gestaucht. Die Feldlinien sind weiterhin geschlossen. Auf der anderen Hemisphäre werden die Feldlinien aufgebrochen und gehen als offene Feldlinien in das interplanetare Magnetfeld über. Im Fall, daß das Magnetfeld parallel zur  $x$ -Achse ist, ändert sich auf der Tagseite wenig im Gegensatz zur Nachtseite. Verglichen mit dem Magnetfeld eines Dipols fällt das Feld eines Quadrupols schneller ab. Dadurch spielt das interplanetare Magnetfeld im Schweif eine wesentlich größere Rolle als im Fall eines Dipols, wie in Abbildung 4.6d deutlich wird.

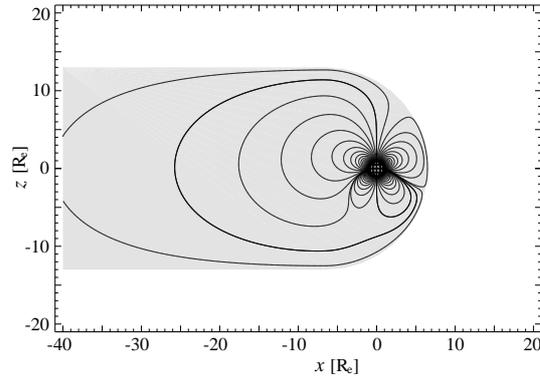
Bei einer Streckung der Feldlinien im Schweif (Abbildung 4.6e) werden durch diese Verzerrung Ströme generiert. Abbildung 4.6f zeigt den Verlauf der Ströme in der  $y$ - $z$ -Ebene in einer Entfernung von  $x = -20R_e$  vom Erdmittelpunkt aus gemessen. In der Mitte bildet sich, wie auch beim Pole-on-Dipol, eine ringförmige Struktur aus. Zwei weitere Zentren für halbkreisförmige Ströme sind in der Äquatorebene am Rand der Magnetopause zu finden.

Ein weiterer interessanter Fall ist die Konfiguration, die bei Vogt und Glassmeier (2000) mit  $\eta = 1$  bezeichnet wird. Dies entspricht einem magnetischen Quadrupolmoment  $Q_{yy}$  oder den von Null verschiedenen Gaußkoeffizienten  $c_2^0$  und  $c_2^2$ , die durch  $c_2^0 = -\frac{1}{\sqrt{12}}c_2^2$  verknüpft sind. Interessant an dieser Konfiguration ist, daß Nullfeldlinien auftreten. Da eine Darstellung der Feldlinien im zweidimensionalen sehr unanschaulich ist, wird auf die Behandlung dieser Konfiguration hier verzichtet.

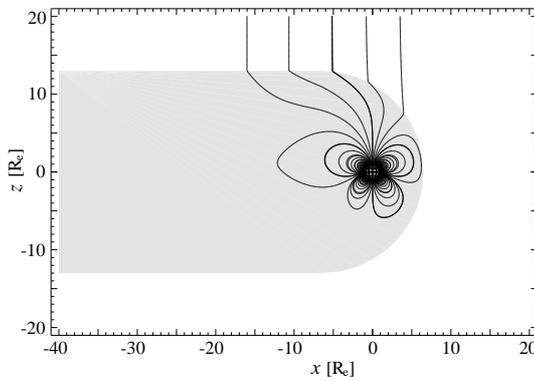
#### 4.4.4. Dipol-Quadrupol-Konfiguration

Natürlich sind verschiedenste Kombinationen von Dipol- und Quadrupolmoment vorstellbar und möglich. Als Beispiel ist hier die Überlagerung eines zonalen Dipols  $c_1^0 = 5000$  nT mit einem zonalen Quadrupol  $c_2^0 = 23000$  nT gewählt (Abbildung 4.7a). Diese Werte wurden so gewählt, daß die magnetische Energie dieser Kombination gleich der Energie des zonalen Dipols  $c_1^0 = 30000$  nT ist. Der erdnahe Bereich wird durch eine komplizierte, im wesentlichen quadrupolare Struktur beherrscht. So befindet sich an den beiden geographischen Polen jeweils ein magnetischer Pol der gleichen Polarität und nahe des Äquators ein polarer Ring der entgegengesetzten Polarität. Die Asymmetrie, die darin besteht, daß der polare Ring nicht wie beim zonalen Quadrupol in der Äquatorebene liegt, ist bedingt durch den Beitrag des Dipol. Im Schweif hingegen dominiert auf Grund des schnelleren Abfalls des Quadrupols der Dipolanteil das Magnetfeldes. Das Besondere an dieser Dipol-Quadrupol-Kombination ist, daß Situationen auftreten

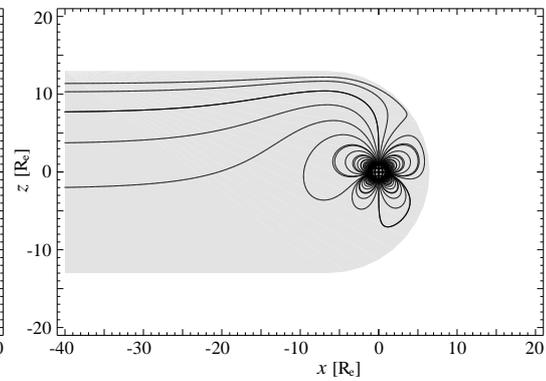
#### 4. Magnetfelder und Feldlinien



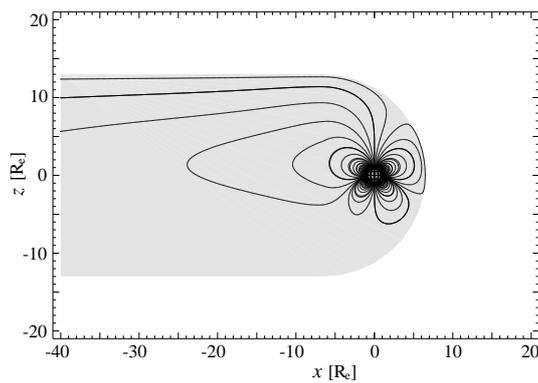
(a) Geschlossene Magnetosphäre,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 1$ .



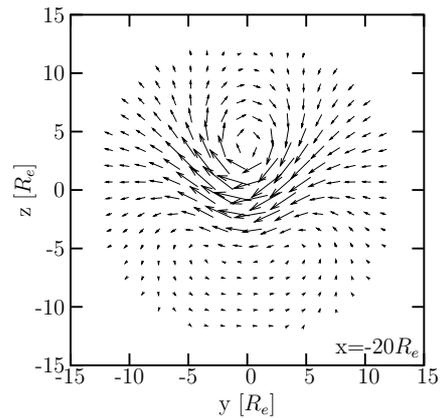
(b) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  senkrecht zu  $x$ ,  $\lambda = 1$ .



(c) Offene Magnetosphäre,  $c_i = 0.1$ ,  $c_a = 0.9$ ,  $\underline{B}_{imf}$  parallel zu  $x$ ,  $\lambda = 1$ .



(d) Feld mit Schweifströmen,  $c_i = c_a = 0$ ,  $\lambda = 0.15$ .



(e) Schweifstrom in der  $yz$ -Ebene bei  $x = -20R_e$ , Parameter wie in e.

**Abbildung 4.7.:** Feldlinien und Schweifströme einer Dipol-Quadrupolkombination mit  $c_1^0 = 5000$  nT und  $c_2^0 = 23000$  nT.

können, in denen die Feldlinien des Dipols und Quadrupols antiparallel zu einander sind und sich somit bei gleicher Feldstärke aufheben. Es entstehen dann sogenannte neutrale Punkte. In Abbildung 4.7a befindet sich ein neutraler Punkt in der südlichen Hemisphäre.

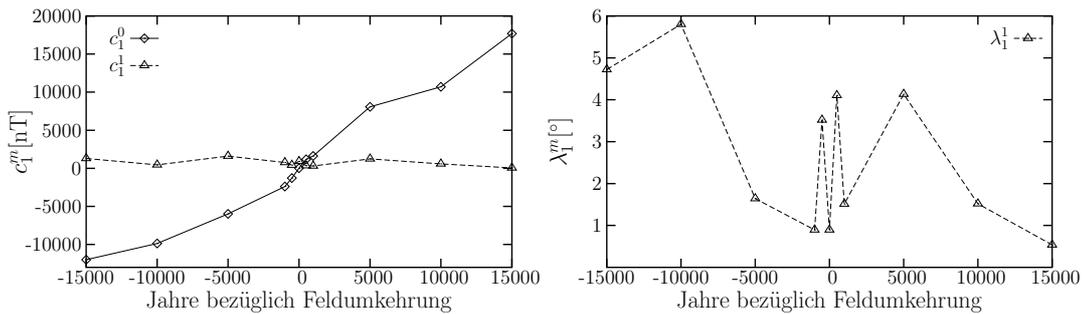
Die Öffnung der Magnetosphäre wirkt sich stärker auf der Nacht- als auf der Tagseite aus (Abbildung 4.7b und c). Unterschieden werden muß hier wieder aus welcher Richtung das interplanetare Magnetfeld einfällt. Im Fall, daß das interplanetare Magnetfeld senkrecht zur  $x$ -Achse (Abbildung 4.7b) orientiert ist, werden die die Feldlinien auf der einen Hemisphäre in Richtung der Erde komprimiert, während sie auf der anderen Hemisphäre als offene Feldlinien in das interplanetare Magnetfeld übergehen. Ist das interplanetare Magnetfeld parallel zu  $x$ -Achse (Abbildung 4.7c), so erstrecken sich die nun offenen Feldlinien in den Schweif hinein.

Bei einer Streckung der Feldlinien im Schweif (Abbildung 4.7d) werden aus den geschlossenen Schweiflinien in Abbildung 4.7a offene Feldlinien. Durch diese Verzerrung wird ein Strom generiert, wie er in Abbildung 4.7e zu sehen ist. Gut zu erkennen ist die dipolare Struktur des Schweifs (vergleiche auch Abbildung 4.4f). Die Stromschicht ist im Gegensatz zur reinen Dipolkonfiguration aus der Äquatorebene heraus verschoben und es handelt sich nicht mehr um eine ebene Schicht, sondern eine gekrümmte. Dieser Schichtstrom wird in nicht symmetrischer Weise über Ströme jeweils in den beiden Hemisphären geschlossen.

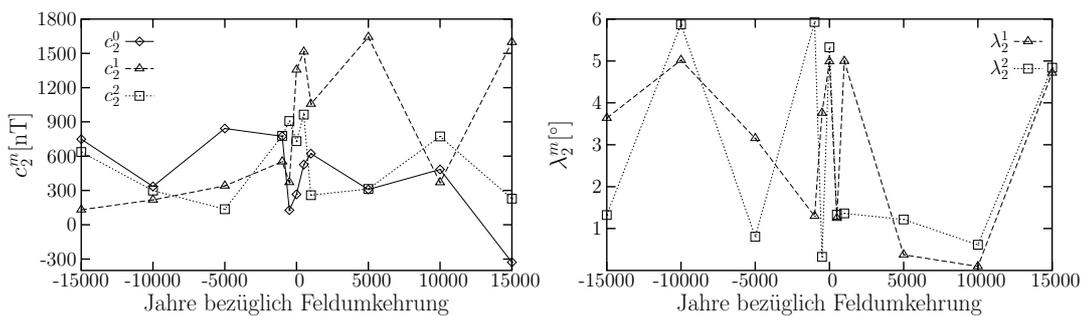
### 4.4.5. Simulierte Feldumkehrung

Ein realistisches Bild der Magnetfeldkonfigurationen während einer Feldumkehrung bieten numerische Simulationen, wie sie von Glatzmaier und Roberts (1995) durchgeführt und bereits in Abschnitt 2.4 vorgestellt wurden.

Die Entwicklung des Magnetfeldes ist in den Abbildungen 4.8 und 4.9 zu sehen. Abbildung 4.8 zeigt die zeitliche Entwicklung der Gaußkoeffizienten des Dipol- und des Quadrupolanteils dieser Simulation. Auf der linken Seite sind jeweils die „Beträge“  $c_n^m$  der Multipole aufgetragen, auf der rechten Seite die Drehwinkel  $\lambda_n^m$  um die  $z$ -Achse. Sehr gut zu erkennen ist das „Umklappen“ des zonalen Dipolanteils von  $c_1^0 = -12000$  nT auf  $c_1^0 = +17500$  nT. Der sektorielle Anteil  $c_1^1$  ändert sich vom Betrag her kaum, aber er dreht sich in nicht vorhersagbarer Weise um die  $z$ -Achse. Auch der Quadrupolanteil zeigt kein eindeutiges Verhalten, sondern springt innerhalb einer Größenordnung. Zur Zeit der Feldumkehrung ist der Quadrupolanteil nicht signifikant größer als zu anderen Zeiten. Daß die höheren Multipolanteile während der Polumkehrung eine nicht unerhebliche Rolle spielen, liegt an der Abnahme des Dipols, denn

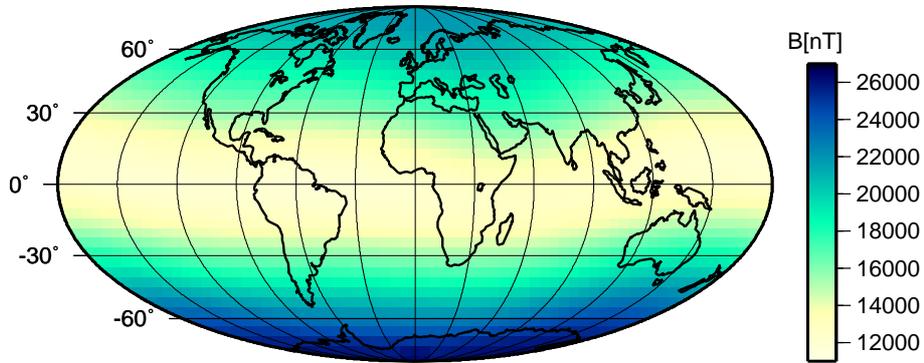


(a) Entwicklung des Dipolanteils.

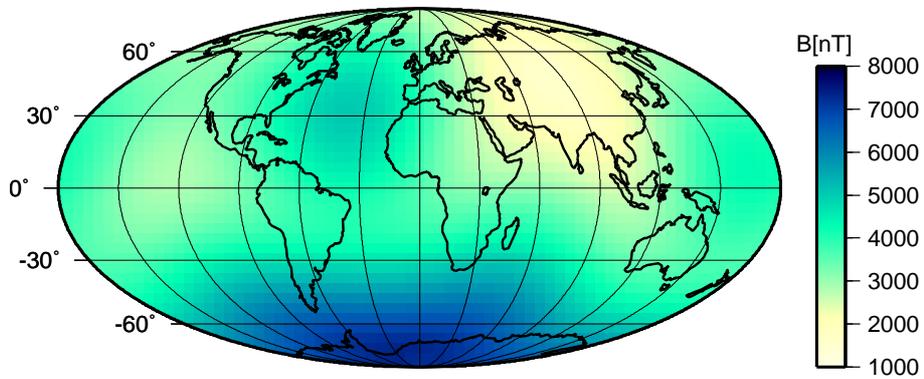


(b) Entwicklung des Quadrupolanteils.

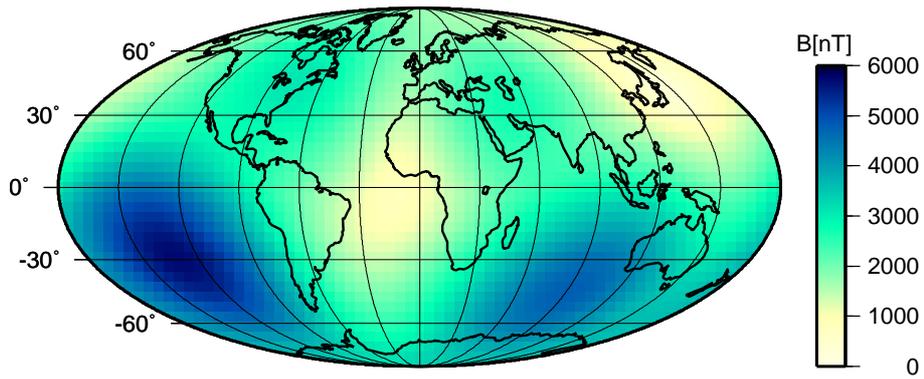
**Abbildung 4.8.:** Entwicklung der Gaußkoeffizienten bis zum Grad  $n = 2$  während einer simulierten Feldumkehrung. Auf der linken Seite sind jeweils die „Beträge“  $c_n^m$  der Multipole aufgetragen, auf der rechten Seite die Drehwinkel  $\lambda_n^m$  um die  $z$ -Achse.



(a) 15000 Jahre vor der Feldumkehr.



(b) 1000 Jahre vor der Feldumkehr.

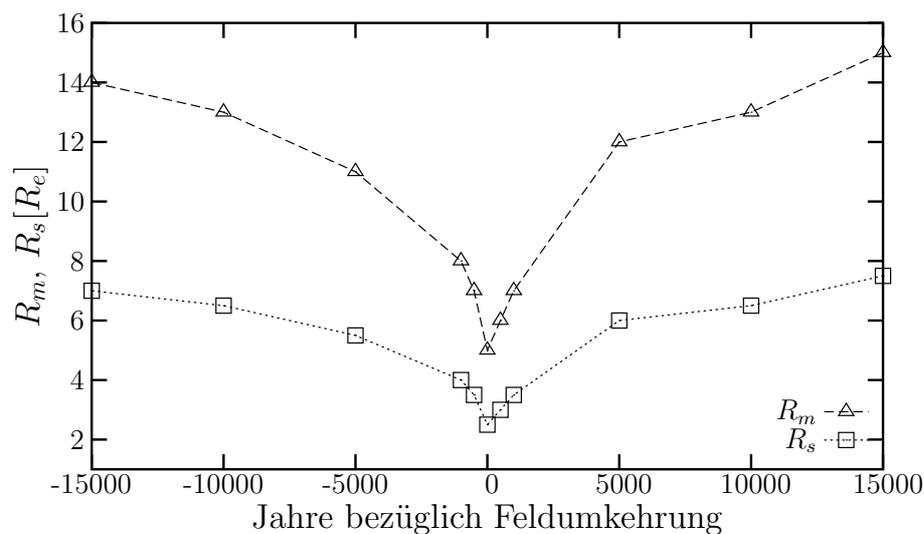


(c) Zur Zeit der Feldumkehr.

**Abbildung 4.9.:** Betrag des Magnetfeldes an der Erdoberfläche während einer simulierten Feldumkehrung.

in diesem Zeitraum sind Dipol- und Quadrupolmoment von vergleichbarer Größe. In Abbildung 4.9 ist der Betrag des Magnetfeldes zu verschiedenen Zeiten während der Feldumkehrung zu sehen. Die dipolare Struktur des Magnetfeldes ist 15000 Jahre vor der Umkehrung deutlich zu erkennen. Das Feld ist mit 27000 nT maximal an den geographischen Polen und mit 11000 nT minimal am Äquator. Bereits 1000 Jahre vor der Umkehrung tritt der Quadrupolanteil deutlich hervor. Während der Feldumkehrung sind auf der südlichen Hemisphäre zwei Maxima und auf der nördlichen Hemisphäre und am Äquator jeweils ein Minimum zu finden. Der maximale Magnetfeldbetrag sinkt auf 6000 nT.

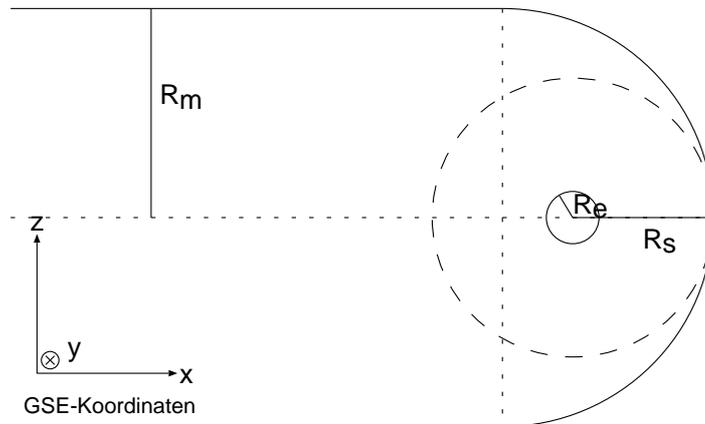
Die Abnahme des Magnetfeldes und die Änderung der Konfiguration während der Polumkehrung führen auch zu einer Änderung in der Struktur und Größe der Magnetosphäre. Die Größe der jeweiligen Magnetosphäre wurde nach den Methoden aus Abschnitt 4.2 bestimmt. Abbildung 4.10 zeigt die Entwicklung der Magnetosphärengröße an Hand der Standoffdistanz und des Schweifradius während der 30000 Jahre der Simulation von Glatzmaier (persönliche Mitteilung). Das Verhältnis dieser beiden Größen ist mit 1:2 beibehalten worden. Der Schweifradius beträgt vor und nach der Feldumkehrung ungefähr  $14R_e$ . Während der Umkehrung sinkt dieser Wert auf  $5R_e$ .



**Abbildung 4.10.:** Entwicklung des Magnetopausenradius  $R_m$  und der Standoffdistanz  $R_s$  während einer simulierten Feldumkehrung.

### 4.5. Vergleich der Magnetosphärenmodelle

In den Kapitel 2.1, 2.6.3.1 und 3 wurden drei verschiedene Magnetfeldmodelle vorgestellt: zum einen die Kugelfunktionsentwicklung ohne Magnetosphäre und zum anderen ein sphärisches und ein zylindrisches Magnetosphärenmodell. In allen drei Model-

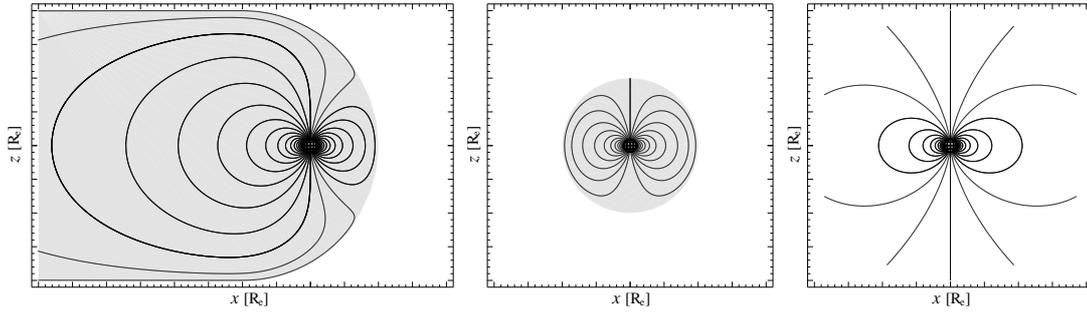


**Abbildung 4.11.:** Geometrie der Magnetfeldmodelle. Dargestellt ist die sphärische Magnetosphäre mit dem Radius  $R_s$  und die zylindrische Magnetosphäre mit dem Zylinder auf der Nachtseite und der Halbkugel auf der Tagseite mit dem Magnetosphärenradius  $R_m$  und der Standoffdistanz  $R_s$ . Die Standoffdistanz  $R_s$  im zylindrischen Modell entspricht dem Magnetosphärenradius  $R_m$  im sphärischen Modell.

len geht die Stärke des Magnetfeldes über die Gaußkoeffizienten ein, zusätzlich gibt es noch unterschiedliche geometrische Parameter. Abbildung 4.11 zeigt die Geometrie der Modelle.

Zu sehen ist die sphärische Magnetosphäre mit dem Radius  $R_s$  und der Erde im Zentrum und die zylindrische Magnetosphäre bestehend aus einem Zylinder mit dem Radius  $R_m$  auf der Nachtseite und der Halbkugel mit demselben Radius  $R_m$  auf der Tagseite. Die Erde liegt dabei innerhalb der Halbkugel und ihr Abstand zur Magnetopause wird durch die Standoffdistanz  $R_s$  beschrieben.

In Abbildung 4.12 sind für einen zonalen Dipol der heutigen Stärke die Feldlinien unter der Verwendung der verschiedenen Magnetfeldmodelle zu sehen. Von links nach rechts sind die zylindrische Magnetosphäre, die sphärische Magnetosphäre und die Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre dargestellt. Im Fall der Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre und der sphärischen Magnetosphäre ist das Magnetfeld rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse. Im Fall der zylindrischen Magnetosphäre liegt diese Symmetrie nicht vor. Verglichen mit der Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre wird das Magnetfeld in der zylindrischen Magnetosphäre auf der Tagseite, also in der Halbkugel, gestaucht und auf der Nachtseite im Zylinder gestreckt. In der sphärischen Magnetosphäre wird es auf der Tag- und auf der Nachtseite gleichermaßen gestaucht. Auf der Tagseite läßt sich das Magnetfeld der zylindrischen Magnetosphäre recht gut durch das einfachere Modell der sphärischen Magnetosphäre darstellen. Doch bereits in den Regionen unter- und oberhalb der Pole treten Abweichungen auf. Auf der Nachtseite im Schweif läßt sich das sphärische Modell gar nicht mehr verwenden. In diesem Fall eignet sich die Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre besser.



**Abbildung 4.12.:** Feld eines zonalen Dipols in der zylindrischen und der sphärischen Magnetosphäre sowie ohne Magnetosphäre (von links nach rechts).

Um eine bessere Vorstellung von den Unterschieden des sphärischen Modells bzw. der Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre vom zylindrischen Modell zu bekommen, wurden die Abweichungen  $b$  des Betrages und die Abweichungen  $\alpha$  des Winkel für verschiedene Kugelschalen bestimmt:

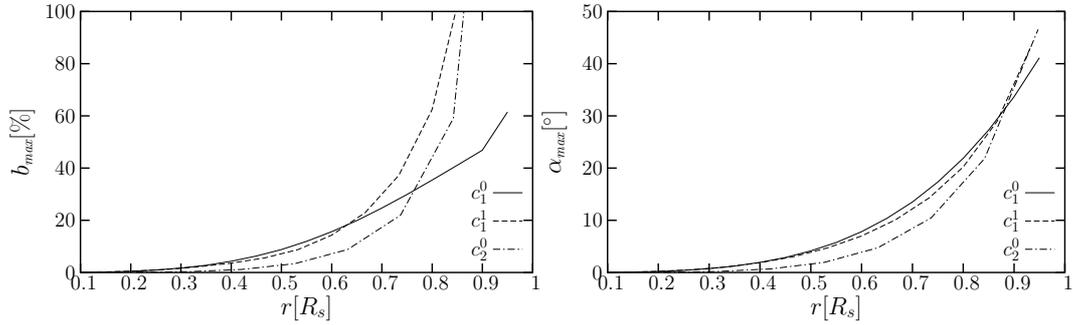
$$b = 1 - \frac{|\underline{B}_i|}{|\underline{B}_{\text{zylinder}}|}, \quad (4.20)$$

$$\cos \alpha = \frac{\underline{B}_i \cdot \underline{B}_{\text{zylinder}}}{|\underline{B}_i| |\underline{B}_{\text{zylinder}}|}. \quad (4.21)$$

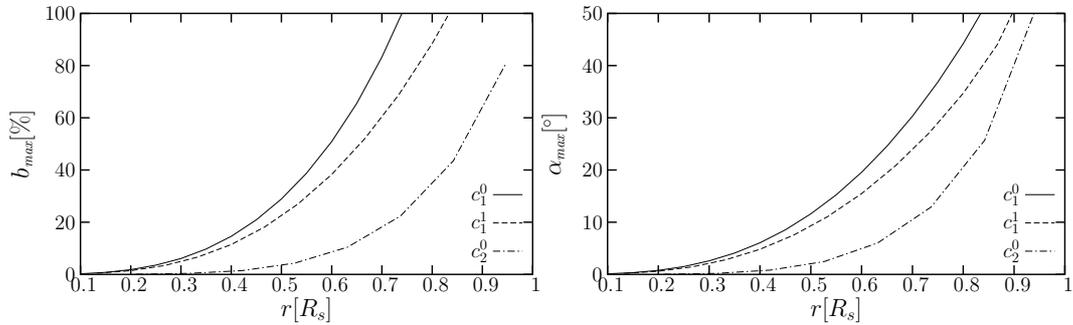
Der Index  $i$  gibt hier wahlweise das Magnetfeld der Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre und das Feld der sphärischen Magnetosphäre an. Abbildung 4.13 zeigt die maximalen Abweichung des Magnetfeldbetrages und der Winkelabweichung auf einer Kugelschale mit dem Radius  $r$ . Der Radius  $r$  ist hier in Einheiten der Standoffdistanz angegeben. Untersucht werden die Konfigurationen eines zonalen Dipols ( $c_1^0$ ), eines Pole-on-Dipols ( $c_1^1$ ) und eines zonalen Quadrupols ( $c_2^0$ ). Dabei wird deutlich, daß das Magnetfeld einer Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre (Abbildung 4.13a) nicht so stark von dem Feld einer zylindrischen Magnetosphäre abweicht wie das Feld in einer sphärischen Magnetosphäre (Abbildung 4.13b). So ist z. B. im Vergleich der zylindrischen Magnetosphäre mit einer Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre die Abweichung des Magnetfeldbetrages bis zu einer Entfernung von  $r = 0.4R_s$  kleiner als 3%, und die Winkelabweichungen liegen unter  $1.5^\circ$ . Beim Vergleich mit einer sphärischen Magnetosphäre werden Abweichungen dieser Größe bereits in einer Entfernung  $r = 0.25R_s$  erreicht. Zu beachten ist, daß es sich hierbei um jeweils die maximale Abweichung auf einer Kugelschale handelt. Es wird also nicht nach Tag- und Nachtseite unterschieden. Die großen Abweichungen im Fall der sphärischen Magnetosphäre sind durch das Fehlen des Schweifes begründet.

In Tabelle 4.2 sind für die verschiedenen Magnetfeldkonfigurationen (zonaler Dipol,

#### 4.5. Vergleich der Magnetosphärenmodelle



(a) Vergleich zwischen Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre und zylindrischer Magnetosphäre.



(b) Vergleich von sphärischer und zylindrischer Magnetosphäre.

**Abbildung 4.13.:** Magnetfeldabweichungen durch unterschiedliche Magnetosphärenformen. Dargestellt ist die maximal Abweichung  $b$  des Betrages und die maximale Abweichung  $\alpha$  des Winkel auf jeweils einer Kugelschale mit dem Radius  $r$ . Es sind Abweichungen für den zonalen Dipol ( $c_1^0$ ), den Pole-on-Dipole ( $c_1^1$ ) und den zonalen Quadrupol ( $c_2^0$ ) untersucht worden.

	Zonaler Dipol	Pole-on-Dipol	Zonaler Quadrupol
$c_n^m$ [nT]	$R_e [R_s]$	$R_e [R_s]$	$R_e [R_s]$
30000	0.100	0.133	
25000	0.110	0.143	0.211
20000	0.125	0.154	0.222
10000	0.133	0.200	0.267
5000	0.200	0.250	0.308

**Tabelle 4.2.:** Erdradien gemessen in Standoffdistanzen für die drei verschiedenen Magnetfeldkonfigurationen (zonaler Dipol, Pole-on-Dipol und zonaler Quadrupol) bei unterschiedlichen Feldstärken.

Pole-on-Dipol und zonaler Quadrupol) der Erdradius in Einheiten der Standoffdistanz für unterschiedliche Feldstärken angegeben. Wie oben gezeigt wurde, liegt die Grenze, bei der der Einfluß der Magnetosphärenform auf das Magnetfeld keine Rolle mehr spielt bzw. die Abweichungen kleiner als 3% sind, bei ungefähr  $R_s = 0.25$ . Ist man am Magnetfeld an der Erdoberfläche oder im erdnahen Raum interessiert, so reicht es aus, die Berechnungen mittels einer Multipolentwicklung durchzuführen, wenn die Magnetosphäre größer als  $4R_e$  ist. Bei kleineren Magnetosphären, wie z. B. im Fall  $c_2^0 = 5000$  nT kann diese Grenze auch unterhalb der Erdoberfläche liegen, so daß der Einfluß der Magnetosphärenform bereits an der Erdoberfläche zu spüren ist.

# 5. Hochenergetische Teilchen in der Magnetosphäre

Das Magnetfeld innerhalb der Magnetosphäre beeinflusst die Bewegung hochenergetischer, geladener Teilchen und damit auch die Teilchenflüsse in die Atmosphäre. In diesem Kapitel wird die Bewegung kosmischer Teilchen in unterschiedlichen Paläomagnetosphären betrachtet, um letztendlich die Teilcheneinfälle auf die Erde zu charakterisieren.

Der erste Teil dieses Kapitels behandelt die technischen Aspekte der Teilchenuntersuchungen, wie die Bestimmung von Teilchenbahnen (Abschnitt 5.1) innerhalb der Magnetosphäre, die Definition von Cutoffbreiten bzw. Impaktflächen für den Einfall von Teilchen auf die Erdoberfläche und die Berechnung von Teilchenflüssen (Abschnitt 5.5). Auch wird gezeigt, wie sich die Teilchenbahnen für verschiedene Magnetosphärengrößen skalieren lassen (Abschnitt 5.2). Der zweite Teil des Kapitels beschäftigt sich mit den Ergebnissen. In den Abschnitten 5.3 und 5.4 werden die zu untersuchenden Teilchen klassifiziert, und es werden die Teilchenverteilungen im Außenraum der Magnetosphäre festgelegt. Ausgehend von diesen Anfangszuständen werden die Teilchenbahnen innerhalb der Magnetosphäre bestimmt, um daraus Cutoffbreiten und Impaktflächen zu berechnen (Abschnitt 5.6). Weiterhin wird der Einfluß der Magnetosphärenform bzw. des Magnetosphärenmodells auf den Teilcheneinfall auf die Erde untersucht (Abschnitt 5.7).

## 5.1. Berechnung der Teilchentrajektorien

### 5.1.1. Bestimmung der Trajektorien mittels Leapfrog-Verfahren

Bei der Bestimmung der Magnetfeldlinien wurde bereits das Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung vorgestellt (Abschnitt 4.1). Eine Alternative zu diesem Verfahren bietet das Leapfrog-Verfahren, wie es von Birdsall und Langdon (1985) beschrieben wird. Es handelt sich hierbei um eine sehr einfache und genaue Methode zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Hierbei wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = q \frac{dr}{dt} \times \underline{B} \quad (5.1)$$

in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}, \quad (5.2)$$

$$m \frac{d\underline{v}}{dt} = q \underline{v} \times \underline{B} \quad (5.3)$$

zerlegt. Da auf der rechten Seite von Gleichung (5.1) nur die Lorentzkraft steht, die keine Wirkung auf den Betrag der Geschwindigkeit hat, gilt die Differentialgleichung und ihre Zerlegung auch für den relativistischen Fall.

Beim Leapfrog-Verfahren benutzt man ein zeitversetztes Schema, d. h. die Orte  $\underline{r}_i$  werden zu ganzen Zeitschritten  $i \cdot \Delta t$  und die Geschwindigkeiten  $\underline{v}_i$  zu halben Zeitschritten  $(i + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$  betrachtet.

Mit der Notation  $\underline{r}_i = \underline{r}(i \cdot \Delta t)$ ,  $\underline{v}_{i+1/2} = \underline{v}((i + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t)$  und entsprechend für die anderen Größen lassen sich die Gleichungen (5.2) und (5.3) in Differenzenschreibweise wie folgt angeben

$$\frac{\underline{r}_{i+1} - \underline{r}_i}{\Delta t} = \underline{v}_{i+1/2}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\underline{v}_{i+1/2} - \underline{v}_{i-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \underline{v}_i \times \underline{B}_i = \frac{q}{2m} (\underline{v}_{i+1/2} + \underline{v}_{i-1/2}) \times \underline{B}_i. \quad (5.5)$$

Um  $\underline{v}_{i+1/2}$  zu bestimmen, werden die Terme der Gleichungen (5.5) umsortiert, wie es bei Motschmann (WS 1996/97) gezeigt wird:

$$\underline{v}_{i+1/2} - \frac{q\Delta t}{2m} \underline{v}_{i+1/2} \times \underline{B}_i = \underline{v}_{i-1/2} + \frac{q\Delta t}{2m} \underline{v}_{i-1/2} \times \underline{B}_i. \quad (5.6)$$

Das Vektorprodukt  $\underline{v} \times \underline{B}$  kann man auch in Matrixschreibweise  $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{v}$  angeben:

$$\begin{aligned} \underline{v} \times \underline{B} &= \underline{\underline{B}} \cdot \underline{v} \\ v_y B_z - v_z B_y &= B_{11} v_x + B_{12} v_y + B_{13} v_z \\ v_z B_x - v_x B_z &= B_{21} v_x + B_{22} v_y + B_{23} v_z \\ v_x B_y - v_y B_x &= B_{31} v_x + B_{32} v_y + B_{33} v_z \\ \underline{\underline{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Unter Verwendung der Einheitsmatrix  $\underline{\underline{I}}$  läßt sich nun Gleichung (5.6) umformen:

$$\underline{\underline{I}} \underline{v}_{i+1/2} - \frac{q\Delta t}{2m} \underline{\underline{B}}_i \cdot \underline{v}_{i+1/2} = \underline{v}_{i-1/2} + \frac{q\Delta t}{2m} \underline{v}_{i-1/2} \times \underline{B}_i. \quad (5.8)$$

Den Vektor  $\underline{v}_{i+1/2}$  kann man nun nach dem Distributivgesetz ausklammern:

$$\left( \underline{\underline{I}} - \frac{q\Delta t}{2m} \underline{\underline{B}}_i \right) \cdot \underline{v}_{i+1/2} = \left( \underline{\underline{I}} + \frac{q\Delta t}{2m} \underline{\underline{B}}_i \right) \cdot \underline{v}_{i-1/2}, \quad (5.9)$$

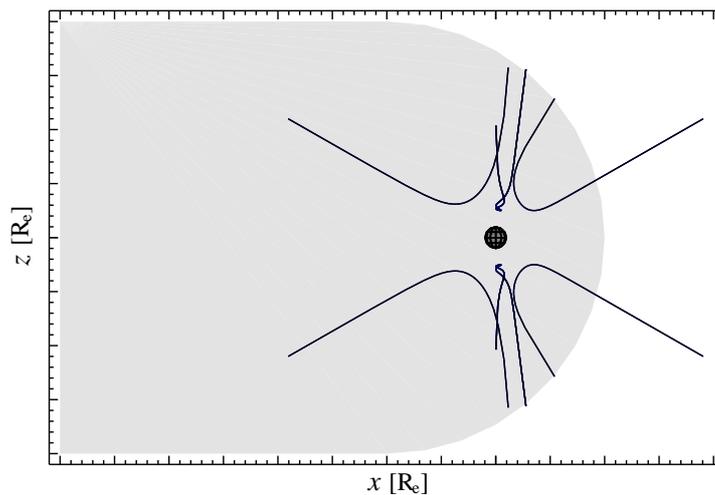
Bildet man dann zu der auf der linken Seite stehenden Matrix die Inverse und multipliziert sie von links an die Gleichung, erhält man ein Ergebnis für die Geschwindigkeit  $\underline{v}_{i+1/2}$  und mit Gleichung (5.4) die Lösung für die Teilchenbahn  $\underline{r}_{i+1}$

$$\underline{v}_{i+1/2} = \left( \underline{I} - \frac{q\Delta t}{2m} \underline{B}_i \right)^{-1} \left( \underline{I} + \frac{q\Delta t}{2m} \underline{B}_i \right) \cdot \underline{v}_{i-1/2}, \quad (5.10)$$

$$\underline{r}_{i+1} = \underline{r}_i + \Delta t \cdot \underline{v}_{i+1/2}. \quad (5.11)$$

Das Magnetfeld  $\underline{B}$  muß entweder in analytischer oder diskreter Form an jeder Stützstelle vorliegen. Im nächsten Abschnitt wird darauf eingegangen, wie der Zeitschritt  $\Delta t$  zu wählen ist, damit die numerische Berechnung der Teilchenbahnen stabil ist.

Abbildung 5.1 zeigt die Bahnen hochenergetischer kosmischer Protonen (1 GeV) in einem zonalen Dipolfeld  $c_1^0 = 30000$  nT. Dargestellt sind hier nur einige Teilchenbahnen, deren Anfangsgeschwindigkeit radial zur Erde gerichtet ist. In dem vorliegenden Beispiel werden die Teilchen in der Magnetosphäre reflektiert und verlassen diese wieder.



**Abbildung 5.1.:** Bahnen hochenergetischer Teilchen (1 GeV) in der Magnetosphäre für ein zonales Dipolfeld  $c_1^0 = 30000$  nT.

Die Teilchenbahnen lassen sich in verschiedenen Gruppen zusammenfassen.

- Vorbeigehende Teilchen: Sowohl mit als auch ohne Magnetfeld gelangen diese Teilchen nicht bis zur Erde. Im allgemeinen handelt es sich hierbei um Teilchen mit einem sehr großen Einfallswinkel, die sich entweder nahezu geradlinig an der Erde vorbeibewegen, weil sie im schwachen Fernfeld der Erde nicht abgelenkt werden, oder aber deren Ablenkung im erdnäheren Feld nicht ausreicht, um als fokussierte Teilchen zur Erde zu gelangen.

- Direkt einfallende Teilchen: Diese Teilchen gelangen sowohl mit als auch ohne Magnetfeld zur Erde. Im wesentlichen handelt es sich hierbei um radial einfallende Teilchen bzw. nahezu radial einfallende Teilchen, die auch im Magnetfeld nicht oder nur schwach abgelenkt werden.
- Reflektierte Teilchen: Ohne Magnetfeld würden diese Teilchen zur Erde gelangen. Durch die Lorentzkraft werden diese Teilchen im Magnetfeld abgelenkt bzw. reflektiert und verlassen die Magnetosphäre wieder.
- Fokussierte Teilchen: Ohne Magnetfeld würden sich diese Teilchen mehr oder weniger gradlinig an der Erde vorbeibewegen. Durch das Magnetfeld werden sie nun so abgelenkt, daß sie die Erde erreichen.

### 5.1.2. Wahl des Zeitschrittes

Der Zeitschritt  $\Delta t$  sollte zum einen so klein wie nötig gewählt, damit die numerische Berechnung stabil bleibt, er sollte aber auch so groß wie möglich gewählt werden, damit nicht unnötig viele Rechenschritte durchgeführt werden müssen, die zu einem großen Zeitaufwand führen können, denn es soll nicht nur eine Teilchenbahn, sondern mehrere Tausend berechnet werden.

Das Magnetfeld, in dem sich das Teilchen befindet, ist nicht homogen, sondern wird mit Annäherung an den Planeten stärker. In einem größeren Magnetfeld wird ein elektrisch geladenes Teilchen stärker abgelenkt als in einem kleineren. Daher ist es sinnvoll, für die Zeitkonstante  $\Delta t$  nicht einen festen Wert zu wählen, sondern diesen nach der Stärke der Bahnkrümmung zu wählen. Die Bahnkrümmung kann man aus der Bewegungsgleichung bestimmen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Die Bewegungsgleichung für ein elektrisch geladenes Teilchen im Magnetfeld lautet:

$$m \frac{d\underline{v}}{dt} = q \underline{v} \times \underline{B} \quad \text{und} \quad (5.12)$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} \quad (5.13)$$

Mit  $v = ds/dt$ , wobei  $s$  die Länge der Teilchenbahn beschreibt, läßt sich die rechte Seite umformen und man erhält:

$$mv^2 \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = q \underline{v} \times \underline{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = \frac{q}{mv^2} \underline{v} \times \underline{B}. \quad (5.14)$$

Die Krümmung einer Kurve im Raum wird durch die zweite Ableitung nach der Kurve beschrieben (Bronstein und Semendjajew, 1989):

$$\frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \right)^2. \quad (5.15)$$

Hierbei ist  $\rho$  der Krümmungsradius und  $\underline{r}$  der Ortsvektor zum entsprechenden Punkt der Kurve.

Setzt man diese beiden Gleichungen ineinander ein, so ist die Krümmung der Kurve gegeben durch

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{q^2}{m^2 v^4} (\underline{v} \times \underline{B})^2 = \frac{q^2}{m^2 v^4} (v \cdot B \cdot \sin \alpha)^2 \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{mv}{|q|B \sin \alpha}. \quad (5.17)$$

Der Winkel  $\alpha$  ist hierbei der sogenannte Pitchwinkel, also der Winkel zwischen der Teilchengeschwindigkeit und dem Magnetfeld.  $\rho$  ist der Krümmungsradius.

Bei der Kreisbewegung eines klassischen Teilchens ist der Zeitschritt  $\Delta t$  mit der Bahngeschwindigkeit  $v$  und dem Bahnsegment  $\Delta s = \rho \Delta \beta$  wie folgt verknüpft:

$$\Delta t = v \Delta s = v \rho \Delta \beta \stackrel{(5.17)}{=} \frac{m \Delta \beta}{|q|B \sin \alpha}, \quad (5.18)$$

wobei  $\rho$  der Kreisradius und  $\Delta \beta$  der überstrichene Winkel ist.

Als Alternative zur theoretischen Berechnung des Krümmungsradius, wie es eben geschehen ist, bietet sich die direkte Berechnung an, die sich aus der Definition des Krümmungsradius in Gleichung (5.15) ergibt:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2. \quad (5.19)$$

Hierbei ist  $\rho$  der Krümmungsradius und  $x, y, z$  sind die Ortskoordinaten der Kurve. Mit  $v_x = v dx/ds$  läßt sich die Krümmungsgleichung auch wie folgt

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{v^2} \left[ \left( \frac{dv_x}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dv_y}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dv_z}{ds} \right)^2 \right] \quad (5.20)$$

schreiben.

Zunächst wurden die Teilchenbahnberechnungen an einfachen Beispielen überprüft. Der einfachste Fall ist ein homogenes Magnetfeld entlang einer der Koordinatenachsen. Das Teilchen bewegt sich dann auf einer Kreisbahn (mit einem konstanten Radius  $\rho$ ) in der Ebene senkrecht zur gewählten Achse. Es wurde dabei getestet, ob der Betrag der Geschwindigkeit  $v$  und der Kreisradius  $\rho$  konstant bleiben. Damit diese Testkriterien auch nach 40000 Berechnungsschritten der Teilchenbahn numerisch erfüllt sind, wird der Zeitschritt  $\Delta t$  mit

$$\Delta t = f \frac{m \Delta \beta}{|q|B \sin \alpha}, f = 0.005 \quad (5.21)$$

gewählt.

Ein weiterer einfacher Fall ist die Bewegung eines Teilchens in der Äquatorebene eines Dipolfeldes, wie es bei Willis et al. (1997) gezeigt wird. Das Teilchen bewegt sich in der Ebene senkrecht zur Dipolachse. Das Führungszentrum dieser Bewegung ist wiederum ein Kreis. Zusätzlich wird noch eine Gyrationbewegung um dieses Zentrum herum ausgeführt. Auch hier muß wieder gelten, daß der Betrag der Geschwindigkeit, sowie der Radius des Kreises konstant bleiben muß. Beides wurde für unterschiedliche Dipolstärken und Teilchengeschwindigkeiten überprüft und bestätigt.

Zur Verifikation der Teilchenbahn läßt sich auch die tatsächliche Krümmung bzw. der Krümmungsradius in jedem Punkt der Bahn nach Gleichung (5.20) mit dem theoretischen Wert vergleichen, der sich nach Gleichung (5.16) berechnen läßt. Betrachtungen für unterschiedliche Magnetfeldkonfigurationen und Teilchenenergien zeigen bei obiger Wahl des Zeitschrittes eine gute Übereinstimmung.

## 5.2. Ähnlichkeit und Skalierbarkeit von Teilchentrajektorien

Da die Berechnung von vielen unterschiedlichen Teilchenbahnen sehr zeitaufwendig werden kann, wird nach einer Möglichkeit gesucht, Teilchenbahnen zu skalieren oder Klassen von Teilchen zu finden, die sich auf gleichen Bahnen bewegen.

In Abschnitt 5.1.2 wurde der Krümmungsradius der Teilchenbahn bestimmt, und Gleichung (5.17) gibt ihn mit

$$\rho = \frac{mv}{|q|B \sin \alpha}$$

an. Gleiche Teilchenbahnen haben in jedem Punkt ihrer Bahn den gleichen Krümmungsradius  $\rho$ . Der Pitchwinkel  $\alpha$  und der Magnetfeldbetrag  $B$  sind keine Teilcheneigenschaften. Verbleibt noch der Ausdruck

$$\frac{|q|}{mv}, \quad (5.22)$$

der auch magnetische Steifigkeit genannt wird. Ist die Steifigkeit für verschiedene Teilchen gleich, so bewegen sie sich bei gleichen Anfangsbedingungen auf gleichen Bahnen. Mit anderen Worten: Ein Teilchen mit der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v$  bewegt sich im Magnetfeld  $B$  auf derselben Bahn wie ein Teilchen mit der doppelten Masse und der halben Geschwindigkeit im selben Magnetfeld oder wie ein Teilchen mit der doppelten Geschwindigkeit in einem zweimal so großen Magnetfeld.

Von besonderem Interesse sind in dieser Arbeit die Abhängigkeit der Bahnen vom Magnetfeld und der Geschwindigkeit bzw. Energie eines Teilchens. Das Magnetfeld ist charakterisiert durch das Dipol- und Quadrupolmoment, sowie durch die Größe der Magnetosphäre. In Kapitel 4.3 wurde beschrieben, auf welche Art und Weise sich das Magnetfeld skalieren läßt. Mit Gleichung (5.17) läßt sich der Krümmungsradius dann als

$$\rho(\tilde{r}) = \frac{(R_m/R_{m,0})^{n+2}}{c_n^m/c_{n,0}^m} \frac{mv}{|q|B_0(\tilde{r}) \sin \alpha} \quad (5.23)$$

schreiben, wobei konstante Sonnenwindbedingungen vorausgesetzt werden. Der Vektor  $\tilde{r}$  gibt die relative Position in Bezug auf die Magnetosphäre an. Somit gibt es nur zwei Möglichkeiten der Skalierung von Teilchentrajektorien:

1. Teilchen mit gleicher Steifigkeit  $mv/|q|$  beschreiben gleiche Bahnen im selben Magnetfeld,
2. gleiche Teilchen ( $m, v, q$ ) bewegen sich in einem durch  $R_m^{n+2}/c_n^m = const$  skalierten Magnetfeld auf gleiche Bahnen (Abschnitt 4.3).

Die zweite Skalierungsrelation spiegelt zwei Aspekte der Interpretation wieder. Erstens: Es gilt  $B(\tilde{r}) = B_0(\tilde{r})$ , d. h. das Magnetfeld an der Magnetopause ist von der Stärke des Multipolmoments unabhängig. Somit können Teilchen, die für  $B_0$  nicht in die Magnetosphäre gelangen, es auch nicht für das skalierte  $B$ . Zweitens: Teilchen mit hohen Energien (Protonen mit einer Energie wesentlich größer als 10 GeV) werden im heutigen Feld nur wenig abgelenkt und erreichen die Atmosphäre, während Teilchen mit kleineren Energien stärker abgelenkt und bei einem Abstand  $r_{ref}$  reflektiert werden und die Magnetosphäre wieder verlassen. Auf Grund der Skalierungsrelation ist  $r_{ref}$  gemessen in  $R_m$  konstant. Wird z. B. im heutigen Feld ein Teilchen bei  $r_{ref} = 0.5R_m$  reflektiert, so geschieht dieses auch in einem kleineren Feld. In diesem Fall hat  $R_m$  einen kleineren Wert, die relative Lage der Erdoberfläche hingegen hat einen größeren Wert mit  $\tilde{r}_e = R_e/R_m$  (wie bereits in Kapitel 4.3 erläutert wurde). Somit kann es wegen  $\tilde{r}_e > r_{ref}$  sein, daß Teilchen, die heute innerhalb der Magnetosphäre reflektiert werden, in einem kleineren Feld bis zur Atmosphäre gelangen, wenn  $\tilde{r} < r_{ref}$ .

### 5.3. Kosmische Teilchen

Die hochenergetischen Teilchen im erdnahen Raum lassen sich durch ihre jeweilige Orts- und Winkelverteilung und durch ihr Energiespektrum charakterisieren. Insbesondere das Energiespektrum spielt eine entscheidende Rolle bei atmosphärischen Prozessen.

Die verschiedenen Teilchenpopulationen, die für atmosphärische Prozesse von Interesse sind, sollen hier kurz in vereinfachter Darstellungsweise aufgezählt werden:

- Galaktische kosmische Strahlung:  
nahezu isotrop einfallende, hochenergetische Teilchen in einem Energiebereich von wenigen MeV bis einigen GeV.  
Kosmische Teilchen haben ihren Ursprung außerhalb der Heliosphäre.
- Solare hochenergetische Teilchen:  
anisotrop einfallende, energetische Teilchen in einem Energiebereich bis zu wenigen 10 MeV.  
Solare Teilchen haben ihren Ursprung auf der Sonne und werden bei solarer Aktivität in Flares und an der damit verbundenen interplanetaren Stoßwelle beschleunigt.

- Ringstromteilchen:

anisotrop verteilte Teilchen in einem Energiebereich kleiner als 1 MeV.

Die Ringstromteilchen, auch als gefangene Teilchen bezeichnet, gelangen während magnetischer Teilstürme in die Magnetosphäre und führen dort im Erdmagnetfeld eine aus Gyration, Spiegelung und Drift überlagerte Bewegung aus. Liegt der Spiegelpunkt innerhalb der Atmosphäre, werden die Teilchen in atmosphärische Prozesse eingebunden und gehen dort verloren.

Diese Arbeit beschränkt sich auf die galaktische kosmische Strahlung. Dabei werden Protonen in einem Energiebereich von 1 MeV-10 GeV betrachtet. Es wird angenommen, daß die Teilchen isotrop auf die Erdmagnetosphäre treffen. Eine kurze Zusammenfassung über kosmische Strahlung wird von Kallenrode (2000) gegeben. Weitere Betrachtungen sind bei Bieber et al. (2000) zu finden.

Die Quellen der galaktischen kosmischen Strahlung befinden sich außerhalb des Sonnensystems, aber noch innerhalb unserer Galaxie. Nur die sehr hochenergetischen Teilchen können ihren Ursprung auch außerhalb der Galaxie haben. Die kosmische Strahlung, die auf der Erde ankommt, setzt sich aus sämtlichen bekannten Elementen zusammen. Am stärksten vertreten sind dabei Protonen und  $\alpha$ -Teilchen. Eins der ersten Energiespektren der kosmischen Strahlung ist von Meyer et al. (1974) veröffentlicht worden und wird bis heute als gültiges Spektrum verwendet. Die Spektren der einzelnen Elemente können abschnittsweise durch Potenzgesetze der Form

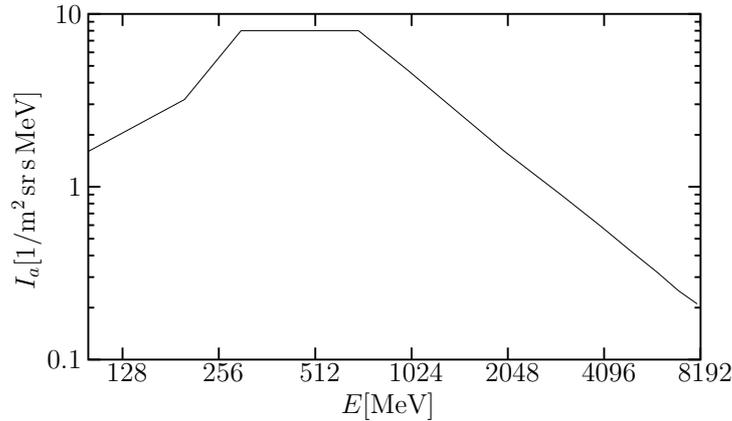
$$I(E) = I_0 \cdot \left( \frac{E}{E_0} \right)^\gamma \quad (5.24)$$

beschrieben werden. Kallenrode (persönliche Mitteilung, 2001) nimmt beispielsweise für das Energiespektrum von Protonen folgende Werte an:

Energiebereich [MeV]	$I_0$ [ $1/m^2$ sr s MeV]	$E_0$ [MeV]	$\gamma$
50 - 300	0.8	50	1.0
300 - 700	8.0	300	0.0
700 - 10000	8.0	700	-1.5

**Tabelle 5.1.:** Das Energiespektrum der kosmischen Strahlung läßt sich abschnittsweise durch Potenzgesetze beschreiben. Hier sind die Parameter für das Spektrum der Protonen bei mittlerer solarer Aktivität angegeben.

Die Intensität kosmischer Teilchen mit einer Energie unterhalb von 5 GeV hängt stark von der Sonnenaktivität ab: Sie verhält sich antizyklisch zum Sonnenzyklus. Maximalen Einfluß hat der Sonnenzyklus auf Teilchen mit einer Energie von 100 MeV, während die Intensität bei höher energetischen Teilchen (4 GeV) nur noch bis zu 20% schwankt. In dieser Arbeit werden kosmische Teilchen bei mittlerer solarer Aktivität betrachtet. Abbildung 5.2 zeigt das Energiespektrum der in die Erdatmosphäre eindringenden Protonen, das sich nach Gleichung (5.24) und Tabelle 5.1 ergibt.



**Abbildung 5.2.:** Energiespektrum der in die Erdatmosphäre eindringenden kosmischen Protonen (Kallenrode, 2001).

Verschiedene Wechselwirkungen der kosmischen Strahlung mit dem interstellaren und interplanetaren Medium führen dazu, daß die Verteilung der kosmischen Teilchen, die auf die Magnetosphäre der Erde treffen, näherungsweise isotrop ist. Zu diesen Wechselwirkungen gehören Stoßprozesse und Beugung an Unregelmäßigkeiten des interstellaren bzw. interplanetaren Magnetfeldes (Meyer et al., 1974).

Protonen in dem hier betrachteten Energiebereich müssen relativistisch behandelt werden. Die relativistische Masse eines Teilchens ist gegeben durch  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , so daß sich die kinetische Energie und die Geschwindigkeit durch

$$E = (m - m_0)c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (5.25)$$

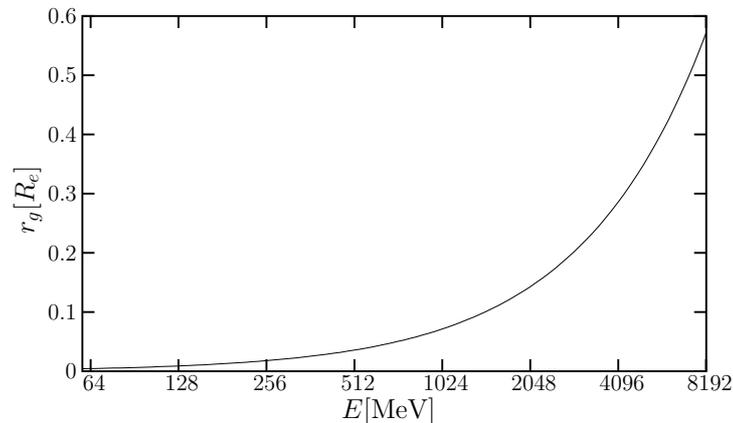
$$\Rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{(E + m_0c^2)^2}} \quad (5.26)$$

ineinander umrechnen lassen.

Um einen Eindruck zu gewinnen, wie sich kosmische Teilchen des hier betrachteten Energiebereiches im Erdmagnetfeld verhalten, wird der Gytrationsradius dieser Teilchen in Erdnähe betrachtet. Dieser wurde bereits in Gleichung (5.17) mit

$$r_g = \frac{mv}{qB \sin \alpha}$$

angegeben. Man beachte, daß sowohl die Teilchenmasse als auch die Geschwindigkeit relativistisch angesetzt werden müssen. Erst bei hinreichend großem Gytrationsradius werden geladene Teilchen nur geringfügig ablenkt und nicht reflektiert. Von Interesse ist daher der minimale auftretende Gytrationsradius. Somit wird  $\sin \alpha = 1$  angenommen. Dies ist der Fall, wenn sich ein Teilchen senkrecht zum Magnetfeld bewegt.



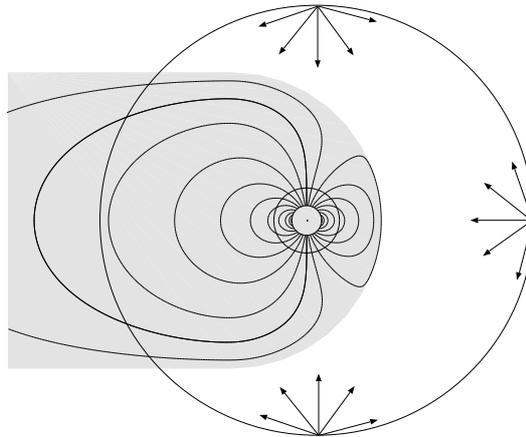
**Abbildung 5.3.:** Gyrationen hochenergetischer kosmischer Teilchen bei einer Feldstärke von 7500 nT. Dies ist die maximale Feldstärke für einen Dipol heutiger Stärke im Abstand von  $1 R_e$  über der Erdoberfläche.

Abbildung 5.3 zeigt die minimalen Gyrationen für hochenergetische Teilchen bei einer Magnetfeldstärke von 7500 nT. Dies entspricht der maximalen Feldstärke für einen Dipol heutiger Stärke im Abstand von  $1 R_e$  über der Erdoberfläche. Dort beträgt der minimale Gyrationenradius erst für die hochenergetischen Teilchen mit einer Energie von 8 GeV etwas mehr als einen halben Erdradius. D. h. statt auf die Erdoberfläche zu gelangen, werden diese Teilchen im Erdmagnetfeld reflektiert und verlassen die Magnetosphäre wieder. Somit spielt selbst bei diesen Energien die Ablenkung durch das Erdmagnetfeld eine wichtige Rolle.

### 5.4. Anfangsbedingungen für Teilchenbahnen

In dieser Arbeit werden nur kosmische Teilchen betrachtet, die in erster Näherung als räumlich isotrop verteilt angenommen werden. Die Berechnungen der Teilchenbahnen erfolgt für jede Teilchenenergie einzeln (siehe Abschnitt 5.3). Alle Teilchenbahnen starten auf einer zur Erde konzentrischen Kugel, wie in Abbildung 5.4 zu sehen ist. Die Anfangsorte der Teilchenbahnen sind auf dieser Kugel gleichverteilt. In den meisten Berechnungen in Abschnitt 5.6 wurden 5400 verschiedene Startorte gewählt. In jedem dieser Punkte starten mehrere Bahnen mit jeweils verschiedenen Einfallswinkel (in den meisten Fällen 1350 verschiedene Winkel). Die Winkel sind ebenfalls gleichverteilt.

Um eine Gleichverteilung der Orte und Winkel zu erhalten, wird wie folgt vorgegangen: Es wird ein festes Gitter  $\Delta\vartheta$ - $\Delta\lambda$  gebildet. In jedem dieser Gittermaschen starten gleich viele Teilchenbahnen. Da die Gittermaschen unterschiedlich groß sind, wird je nach Größe der Gittermasche ein Gewicht zugeordnet. D. h. ein Teilchen, das am Pol startet, wo die Maschen kleiner sind, hat ein kleineres Gewicht als ein Teilchen, das am Äquator startet. Gleiches gilt auch für die Winkel, die ebenfalls gewichtet werden.



**Abbildung 5.4.:** Anfangsorte und -geschwindigkeiten der Teilchenbahnen.

Je nach Einfallswinkel, Teilchengeschwindigkeit, die sich aus der Teilchenenergie ergibt, und Startort durchqueren die Teilchen die Kugel, ohne auf die Magnetosphäre zu treffen, oder sie gelangen in die Magnetosphäre, werden dort abgelenkt und verlassen die Magnetosphäre wieder, oder sie treffen auf die Erde. Registriert werden alle Teilchen, die auf der Erdatmosphäre ankommen. Dabei werden nicht die Anzahl der Bahnen gezählt, sondern es werden die Teilchen mit ihrer Gewichtung aufaddiert. Der Radius  $R_a$  der Erdatmosphäre wird mit  $R_a = R_e + 100 \text{ km}$  festgelegt. Dieser Radius ist auch stets gemeint, wenn im weiteren Verlauf dieser Arbeit mal Teilcheneinfälle auf die Erde und mal von in die Atmosphäre gesprochen wird.

Bei der Berechnung der Teilchenbahnen werden in den Beispielfällen für den zonalen und den Pole-on-Dipol sowie für den zonalen Quadrupol skalierte Magnetfelder, wie sie in Abschnitt 4.3 vorgestellt wurden, verwendet. In Abschnitt 5.2 wurde gezeigt, daß Teilchen in zueinander skalierbaren Magnetosphären gleiche Bahnen beschreiben. Somit kann man den Teilcheneinfall auf der Erdatmosphäre für mehrere verschiedene Magnetfelder gleichzeitig bestimmen, indem man für jedes Magnetfeld den Teilcheneinfall auf dem dazugehörigen relativen Erdradius bestimmt. In Abbildung 5.4 sind zwei dieser Radien eingezeichnet. Die Wahl der Magnetfeldstärken für die einzelnen Konfigurationen sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

Für die in dieser Arbeit betrachteten Teilchen sind die Gebieten, in die Teilchen auf die Erde einfallen, unabhängig von der Größe der Kugel, auf der die Teilchenbahnen starten. Dieses gilt nicht für die Anzahl der einfallenden Teilchen, weshalb mit normierten Teilcheneinfällen gearbeitet werden muß (siehe Abschnitt 5.5). Vorausgesetzt wird, daß die tagseitige Magnetosphäre vollständig innerhalb dieser Startkugel liegt. Das bedeutet auch, daß das Magnetfeld im hinteren Schweif keinen Einfluß auf Teilchen des hier betrachteten Energiebereichs hat. Daß diese Vermutung gerechtfertigt ist, wird in Abschnitt 5.7 gezeigt.

## 5.5. Bestimmung von Teilcheneinfällen in die Atmosphäre

Um die Verteilung einfallender Teilchen in der Atmosphäre zu charakterisieren, werden verschiedene Größen vorgestellt, die sogenannte Cutoffbreite und die Impaktfläche und die damit verbundenen Impaktgebiete, der relative Teilcheneinfall und das Energiespektrum der einfallenden Teilchen.

Die Cutoffbreite  $\beta$  definiert diejenige geographische Breite, die Gebiete voneinander trennt, in die Teilchen in die Atmosphäre gelangen bzw. nicht gelangen, wie auch in Abbildung 5.5 zu sehen ist. Die Cutoffbreite ist eine sehr anschauliche Größe für symmetrische Magnetfeldkonfigurationen, wie z. B. den zonalen Dipol.

Für nicht symmetrische Magnetfeldkonfigurationen bietet sich der Begriff einer Cutoffbreite nicht an. Um trotzdem eine Aussage über die Verteilung der einfallenden Teilchen treffen zu können, wird der Begriff des „Impaktgebietes“ und der „Impaktfläche“ hier eingeführt. Die Impaktgebiete sind all jenen Gebieten, in denen Teilchen einfallen. In Abbildung 5.5 entspricht das den dunkelgrauen Flächen. Die Impaktfläche ist ein Maß für die Gesamtfläche, in der Teilchen einfallen, gemessen in Prozent der Erdoberfläche.

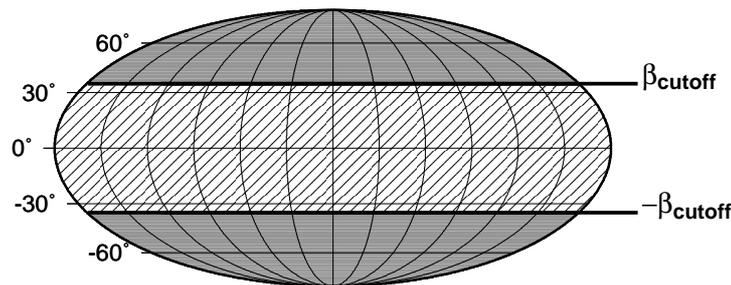


Abbildung 5.5.: Definition der Cutoffbreite und der Impaktgebiete.

Eine weitere interessante Größe ist der relative Teilcheneinfall  $\eta$  in die Atmosphäre und das damit verbundene Energiespektrum  $I_a$ .

Der relative Teilcheneinfall  $\eta$  wird definiert durch

$$\eta(E) = \frac{N(E)}{N_0(E)}, \quad (5.27)$$

wobei  $N$  die Gesamtzahl der aller Teilchen ist, die für eine gewisse, vorgegebene Magnetfeldkonfiguration pro Energie in die Atmosphäre gelangen. Die Größe  $N_0$  beschreibt die Anzahl der Teilchen einer festen Energie, die auf die Erde gelangen, wenn kein Magnetfeld vorhanden wäre. Im folgenden wird  $N_0$  auch als Nullfeldeinfallrate bezeichnet. Wie in Abschnitt 5.4 beschrieben, werden skalierte Magnetfelder verwendet, um die Teilchenbewegungen für mehrere Feldstärken einer Magnetfeldkonfiguration zu bestimmen. Dabei werden die Teilchenbahnen auf einer Kugel außerhalb

der Magnetosphäre gestartet und die Teilchen gezählt, die auf den verschiedenen großen Erdkugeln ankommen. Um  $N_0$  zu bestimmen, wird ebenso vorgegangen, nur mit dem Unterschied, daß das Magnetfeld innerhalb der Magnetosphäre Null ist. Für jede Magnetfeldstärke erhält man also ein anderes  $N_0$ .

Die Intensität der Strahlung gemessen am Erdboden wird durch das Energiespektrum  $I(E)$  der kosmischen Strahlung (Meyer et al., 1974) angegeben, wie in Abschnitt 5.3 beschrieben.

Das Energiespektrum  $I_a$  der Teilchen in der Atmosphäre für ein beliebiges Paläomagnetfeld läßt sich aus dem relativen Teilcheneinfall  $\eta$  und dem heutigen Energiespektrums  $I$ , das durch Gleichung 5.24 und Tabelle 5.1 gegeben ist, bestimmen. Dazu muß zuerst der relative Teilcheneinfall  $\zeta$  eines beliebigen Feldes bezüglich des heutigen Feldes bestimmt werden:

$$\zeta(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(E)_{\text{heute}}}. \quad (5.28)$$

Das Energiespektrum  $I_a$  der kosmischen Strahlung in einer Paläomagnetosphäre ergibt sich dann aus dem heutigen Spektrum  $I$  gewichtet mit der Größe  $\zeta$

$$I_a(E) = \zeta(E)I(E). \quad (5.29)$$

Zur Bestimmung der Cutoffbreite, der Impaktfläche und der Teilcheneinfälle werden Teilchen von außen auf der Magnetosphäre gestartet und ihre Bahn verfolgt. Hierzu wird die Bewegungsgleichung integriert, wie in Abschnitt 5.1 beschrieben wurde. Je nach Startbedingungen (siehe Abschnitt 5.4) und kinetischer Energie durchqueren die Teilchen die Magnetosphäre, werden reflektiert und verlassen die Magnetosphäre wieder, oder sie treffen auf die Erdatmosphäre, wo sie bei atmosphärischen Prozesse eine Rolle spielen.

Zählt man nun alle auf die Erdatmosphäre treffenden Teilchen ( $N$ ) und sortiert die Auftrefforte nach geographischen Längen und Breiten, so kann man die Cutoffbreite und Impaktfläche bestimmen. Weiterhin kann man aus der Teilchenanzahl  $N$  auch den relativen Teilcheneinfall  $\eta$  und das Energiespektrum  $I_a$  in die Atmosphäre bestimmen. Smart et al. (2000) berechnen Cutoffbreiten mit Hilfe des Magnetosphärenmodells von Tsyganenko und vergleichen diese auch mit Messungen (Smart und Shea, 2001). Neben der Cutoffbreite werden auch Impaktgebiete für unterschiedliche Teilchenenergien bestimmt. Die zu den Berechnungen herangezogenen Teilchenbahnen starten in der oberen Atmosphäre mit einer radial nach außen gerichteten Anfangsgeschwindigkeit. Registriert werden alle Bahnen, die die Magnetopause verlassen. Nachteil dieser Berechnungen ist, daß zum einen nur radiale Anfangsgeschwindigkeiten benutzt werden. Hierdurch werden viele mögliche Bahnen nicht betrachtet. Zum anderen erhält man durch das Rechnen von innen nach außen eine sehr inhomogene Verteilung der Teilchen außerhalb der Magnetosphäre. Qualitative Betrachtungen des Teilcheneinfalls, wie sie z. B. oben beschrieben wurden, sind somit nur sehr eingeschränkt möglich. Die Cutoffbreiten, die sich für einen zonalen Dipol nach den Berechnungen der hier vorliegenden Arbeit ergeben, stimmen gut mit den Ergebnissen von Smart und Shea (2001) überein.

## 5.6. Teilchen in möglichen Paläomagnetosphären

In Abschnitt 4.4 wurden mögliche Paläomagnetfelder vorgestellt. Es wurden idealisierte Konfigurationen betrachtet, wie der zonale Dipol, der Pole-on-Dipol und der zonale Quadrupol, aber auch Paläokonfigurationen aus numerischen Simulationen.

Für diese Fälle sollen nun im folgenden die Teilcheneinfälle auf der Erde untersucht werden. Dazu werden für jede Konfiguration bei unterschiedlichen Feldstärken die Gebiete bestimmt, in die Teilchen einfallen. Ferner werden Cutoffbreite, Impaktfläche und Teilchenflüsse quantifiziert. Zusätzlich werden für alle Magnetfeldkonfigurationen das Oberflächenfeld sowie die Radialkomponente des Magnetfeldes dargestellt. Aus dieser Kenntnis kann man bereits auf die Gebiete rückschließen, in die Teilchen bevorzugt einfallen. Zum einen kann es sich um Gebiete handeln, in denen ein schwaches Magnetfeld herrscht, denn ein starkes Feld lenkt die Teilchen ab oder reflektiert sie sogar. Zum anderen können es auch Gebiete sein, in denen das Magnetfeld vorwiegend eine radiale Komponente aufweist, denn geladene Teilchen unterliegen der Lorentzkraft, die senkrecht zum Magnetfeld und der Geschwindigkeit des Teilchens wirkt, so daß sich diese entlang der Magnetfeldlinien unbeeinflusst bewegen können. Auch können Teilchen, die sich ohne Magnetfeld geradlinig an der Erde vorbeibewegen, im Magnetfeld so abgelenkt werden, daß sie auf die Erde treffen.

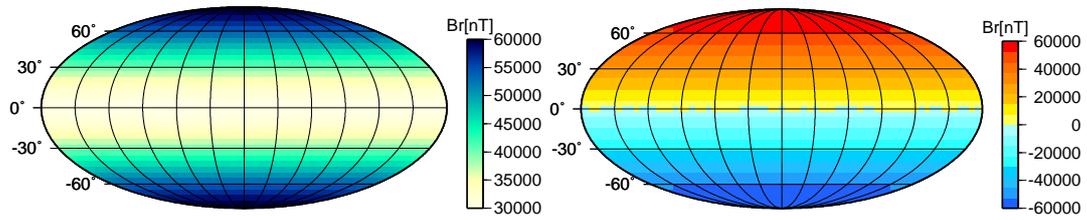
Wie in den Abschnitt 5.3 und 5.4 bereits erläutert wurde, werden kosmische Teilchen in einem Energiebereich von 1 MeV bis 8 GeV betrachtet. Die auf die Magnetosphäre einfallenden Teilchen sind isotrop in Raum und Geschwindigkeit verteilt.

### 5.6.1. Zonaler Dipol

Das Magnetfeld eines zonalen Dipols ( $c_1^0$ ) wurde bereits in Abschnitt 4.4.1 vorgestellt. In diesem Fall ist das Feld auf der Erdoberfläche symmetrisch bezüglich der Rotationsachse ( $z$ -Achse), wobei es an den Polen maximal und am Äquator minimal ist (Abbildung 5.6a). Auf Grund der vorwiegend radialen Magnetfeldlinien (siehe Abbildung 5.6b) dringen die Teilchen bevorzugt in die polaren Regionen der Erdatmosphäre ein. Abbildung 5.6c zeigt die Gebiete, in die Protonen mit der kinetischen Energie von 4 GeV im Fall eines zonalen Dipolfeld der Stärke  $c_1^0 = 30000$  nT einfallen. Die Anzahl der Teilchen ist direkt an den Polen am größten und nimmt mit abnehmender geographischer Breite ab, bis hin zur Cutoffbreite  $\beta_{cutoff} = 35^\circ$ . In den gestrichelten Bereich dringen keine Teilchen ein.

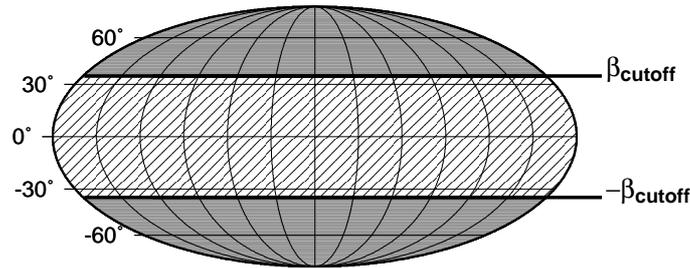
Abbildung 5.6d verdeutlicht die Abhängigkeit der Cutoffbreite  $\beta_{cutoff}$  von der Teilchenenergie und der Magnetfeldstärke. Es gelangen keine Teilchen in geographische Breiten  $\beta < \beta_{cutoff}$ . Die durchgezogene Linie stellt die Cutoffbreite für ein Feld heutiger Stärke dar. Teilchen mit einer Energie von 60 MeV dringen lediglich in den polaren Breiten bis zu  $70^\circ$  geographischer Breite ein, während Teilchen mit Energien von 8 GeV auch in niedrige Breiten von  $20^\circ$  gelangen. Die hier berechneten Cutoffbreiten stimmen sehr gut mit Berechnungen von Smart und Shea (2001) überein. Nimmt das Magnetfeld drastisch ab, z. B. auf  $c_1^0 = 5000$  nT (gepunktete Linie), so gelangen bereits

## 5.6. Teilchen in möglichen Paläomagnetosphären

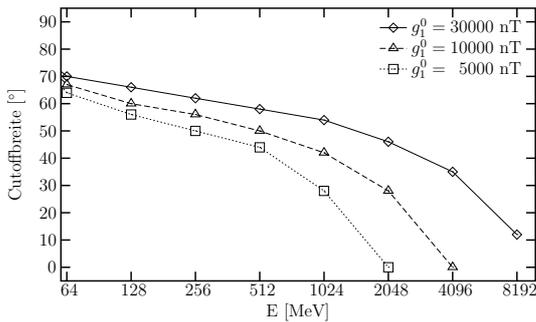


(a) Betrag des Magnetfeldes ( $c_1^0 = 30000$  nT).

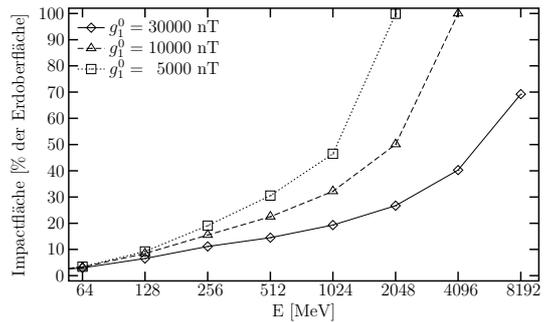
(b) Radialkomponente des Magnetfeldes.



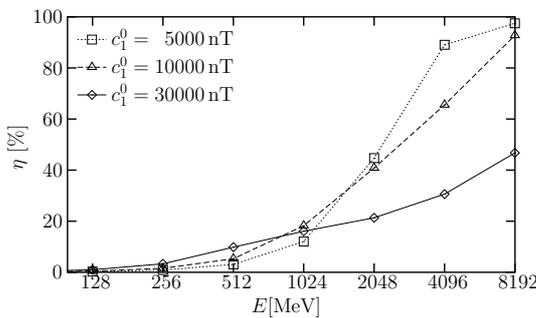
(c) Teilcheneinfallgebiete (Teilchenenergie 4 GeV).



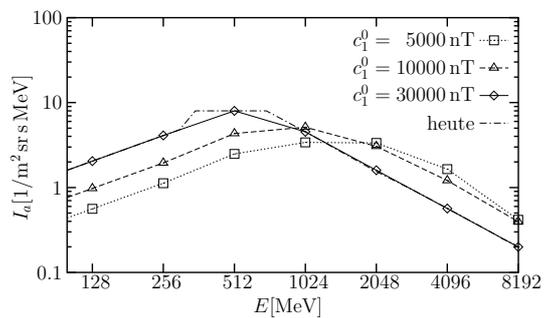
(d) Cutoffbreite.



(e) Impaktfläche.



(f) Relativer Teilcheneinfall.



(g) Energiespektrum.

**Abbildung 5.6.:** Teilcheneinfall für einen zonalen Dipol.

Teilchen mit einer kinetischen Energie etwas über 1 GeV in die niedrigen Breiten von  $30^\circ$ , und mit einer Energie oberhalb von 2 GeV treffen sie auch am Äquator ein. Für die niedrigen Energien des betrachteten Bereiches ändert sich die Cutoffbreite nicht so stark. Der Einfall dieser Teilchen beschränkt sich auch in schwachen Magnetfeldern auf die polaren und mittleren Breiten.

Die Fläche, auf die Teilchen einfallen, ist die sogenannte Impaktfläche, wie sie in Abbildung 5.6e dargestellt ist. Auch hier gibt die durchgezogene Linie wieder die Verhältnisse in einem Feld heutiger Stärke an. Teilchen mit kinetischen Energien unter 100 MeV bedecken weniger als 10 % der Erdoberfläche, während Teilchen mit Energien von 8 GeV bereits in 80 % der Erdatmosphäre gelangen. In einem schwachen Magnetfeld von  $c_1^0 = 5000$  nT fallen bereits Teilchen mit einer Energie von 2 GeV überall auf der Erde ein. In diesem Fall gelangen zum einen Teilchen auch in Gebiete, in die bei heutiger Feldstärke keine Teilchen eindringen. Zum anderen treffen auch Teilchen mit niedrigeren Energien, die in stärkeren Feldern reflektiert worden sind, nun auf die Erde.

Beide Prozesse tragen zu einer Erhöhung des Teilchenflusses in die Atmosphäre bei. Um diesen Teilchenfluß besser zu beschreiben, wird der relative Teilcheneinfall  $\eta$  (Abbildung 5.6f) und das Energiespektrum  $I_a$  (Abbildung 5.6g) der einfallenden Teilchen betrachtet. Der relative Teilcheneinfall  $\eta = N/N_0$  gibt an, wieviele Teilchen  $N$  der jeweiligen Energien bei unterschiedlichen Magnetfeldern auf der Erde ankommen im Verhältnis zur Teilchenzahl  $N_0$ , die die Erde ohne Erdmagnetfeld erreichen. Für kleine Teilchenenergien (kleiner als 1 GeV) liegt der relative Teilcheneinfall unter 20 %, und er unterscheidet sich bezüglich verschiedener Magnetfeldstärken nur wenig von der heutigen Einfallrate (durchgezogenen Linie). Anders verhält es sich bei hohen Teilchenenergien. Während beim heutigen Feld ( $c_1^0 = 30000$  nT) gerade mal 30 % der Teilchen mit einer Energie von 4 GeV auf die Erde gelangen, sind es in schwachen Feldern ( $c_1^0 < 10000$  nT) bereits über 90 %.

Abbildung 5.6g zeigt das Energiespektrum der einfallenden Teilchen. Die durchgezogene Linie gibt das heutige Spektrum an, wie es in Abschnitt 5.3 vorgestellt wurde. Für Teilchen in schwächeren Magnetfeldern erwartet man eine größere Intensität als heute. Dies ist auch für Teilchenenergien größer als 1 MeV der Fall, nicht aber für kleinere Teilchenenergien. Hier tritt nämlich ein statistisches Problem auf, daß zu wenige Stichproben vorhanden sind. Wie in Abschnitt 5.5 eingeführt, ist die Anzahl  $N_0$  der in die Atmosphäre gelangenden Teilchen für jede Magnetfeldstärke unterschiedlich. Es treffen teilweise nur weniger als 100 Teilchenbahnen in die Erdatmosphäre, und oft tritt der Fall auf, daß die Bahnen, die in einem schwachen Feld auf der Erde enden, auch diejenigen Bahnen sind, die in einem starken Feld zur Erde gelangen. D. h. die Anzahl  $N$  ist für alle Magnetfeldstärken gleich, nicht aber  $N_0$ . Für schwache Magnetfelder ist der relative Teilcheneinfall auf Grund einer zu geringen Stichprobenumfang zu klein. Dies wirkt sich natürlich auch auf das Energiespektrum aus. Bei der Bestimmung der Cutoffbreite bzw. der Impaktfläche wirkt sich die schlechte Statistik nicht so sehr aus, weil in diesen Fällen lediglich von Interesse ist, ob und wo Teilchen in die Atmosphäre gelangen, aber nicht, wieviele.

### 5.6.2. Pole-on-Dipol

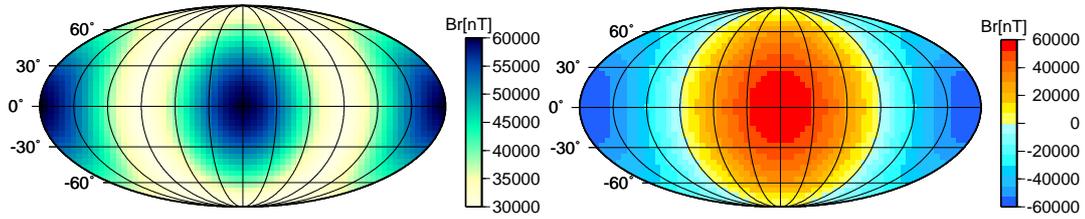
Im Fall eines Pole-on-Dipols ( $c_1^1$ ) befinden sich die magnetischen Pole in der Äquatorebene, einer auf der sonnenzugewandten und einer auf der sonnenabgewandten Seite, wie bereits in Abschnitt 4.4.2 erläutert. In diesen Regionen ist der Betrag des Magnetfeldes maximal, während es auf einem Großkreis, der durch die geographischen Pole geht, minimal ist (siehe Abbildung 5.7a). In den Gebieten maximaler Feldstärke ist das Feld vorwiegend radial gerichtet (Abbildung 5.7b), so daß geladene Teilchen hier besonders einfach eindringen können, wie Abbildung 5.7c zeigt.

Die Definition einer Cutoffbreite ist in diesem Fall nicht ganz einfach. Abbildung 5.7c veranschaulicht, wie die Cutoffbreiten für einen Pole-on-Dipol in dieser Arbeit definiert werden. Es gelangen keine Teilchen in geographische Breiten  $\beta > \beta_{cutoff}$ . Zu beachten ist allerdings, daß es auch für Breiten  $\beta < \beta_{cutoff}$  Gebiete gibt, in die keine Teilchen einfallen. Wie Abbildung 5.7d zeigt, gelangen Teilchen mit niedrigen Energien von ungefähr 100 MeV vorwiegend in äquatoriale Gebiete bis zu einer Breite von  $20^\circ$ . Höherenergetischen Teilchen (8 GeV) kommen in einem starken Feld (durchgezogene Linie) auch in mittlere Breiten bis zu  $75^\circ$ . In einem schwachen Magnetfeld (gepunktete Linie) treffen in diesen Regionen bereits Teilchen mit einer Energie von 2 GeV ein, während höherenergetische Teilchen bis zu den geographischen Polen kommen.

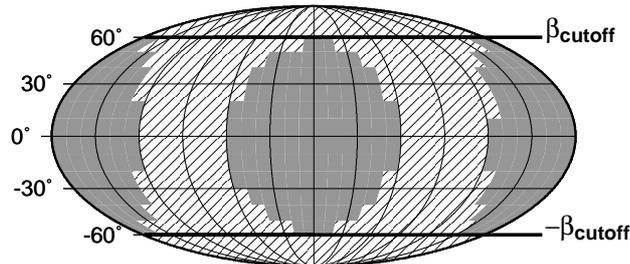
Für niedrige Teilchenenergien ( $<100$  MeV) hängt die Impaktfläche nur wenig von der Stärke des Magnetfeldes ab, sie beträgt weniger als 10 % der Erdoberfläche. Für Teilchen mit höheren Energien hängt die Impaktfläche hingegen stark von der Stärke des Magnetfeldes ab, in dem sich die Teilchen bewegen. In einem Feld der heutigen Stärke ( $c_1^1 = 30000$  nT) erreichen Teilchen mit einer Energie von 8 GeV nur ungefähr 80 % der Erdoberfläche, während Teilchen mit einer Energie von 2.5 GeV in einem schwachen Feld ( $c_1^1 = 5000$  nT) überall auf die Erde gelangen.

Um den Teilcheneinfall zu quantifizieren, wird der relative Teilcheneinfall  $\eta$ , also die Teilchenanzahl relativ gemessen zur Teilchenanzahl, die ohne Magnetfeld in die Atmosphäre gelangt. (Abbildung 5.7f) und das Energiespektrum  $I_a$  der in die Atmosphäre einfallenden Teilchen (Abbildung 5.7g) bestimmt. Für Teilchenenergien unterhalb 1 GeV beträgt der relative Teilcheneinfall nur wenige Prozent. Mit zunehmender Teilchenenergie steigt auch der relative Teilcheneinfall an. So gelangen für Teilchenenergien von 8 GeV bei einem Magnetfeld der heutigen Stärke ungefähr die Hälfte aller Teilchen in die Erdatmosphäre wie im Fall ohne Erdmagnetfeld. Bei schwächerem Magnetfeld werden sogar bis zu 100 % der Nullfeldeinfallrate erreicht. Auf Grund der kleineren Magnetopause ist die Strecke, auf der die Teilchen im Magnetfeld abgelenkt werden können, kleiner und somit wird auch die durchschnittliche Ablenkung der Teilchen geringer. Teilchen, die im starken Feld abgelenkt oder reflektiert werden, erreichen somit die Erde. Ein zweiter Effekt, der dazu führt, daß mehr Teilchen in die Atmosphäre gelangen, ist die Fokussierung von Teilchen. D. h. Teilchen, die sich im Nullfeld geradlinig fortbewegen und somit die Erde nicht treffen, werden unter Umständen im Magnetfeldes so abgelenkt werden, daß sie auf die Atmosphäre gelangen. Das Energiespektrum (Abbildung 5.7g) sieht ähnlich aus wie im Fall eines zonalen

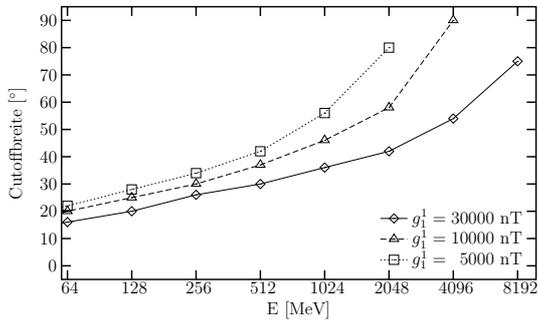
## 5. Hochenergetische Teilchen in der Magnetosphäre



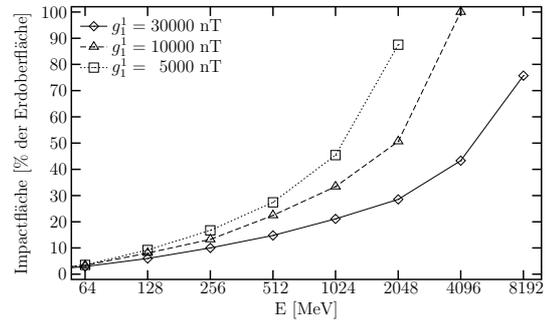
(a) Betrag des Magnetfeldes ( $c_1^1 = 30000$  nT). (b) Radialkomponente des Magnetfeldes.



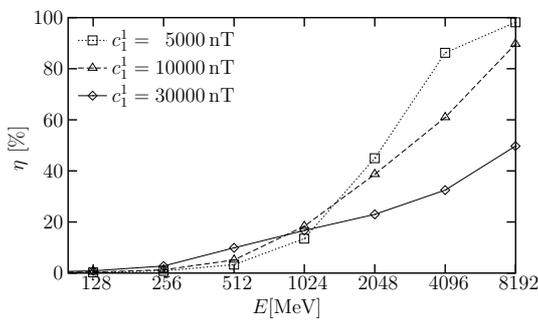
(c) Teilcheneinfallgebiete (Teilchenenergie 4 GeV).



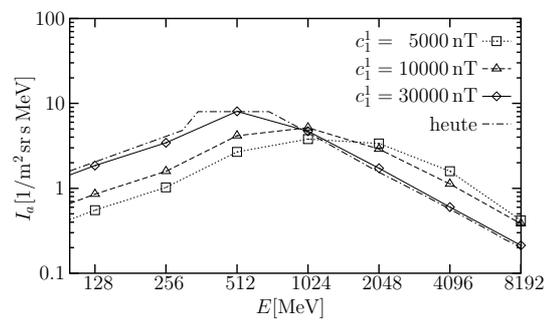
(d) Cutoffbreite.



(e) Impactfläche.



(f) Relativer Teilcheneinfall.



(g) Energiespektrum.

Abbildung 5.7.: Teilcheneinfall für eine Pole-on-Dipol.

Dipols. Bei vergleichbaren Magnetfeldstärken sind auch entsprechend gleiche Kurven des Energiespektrums zu finden. Für hohe Teilchenenergien und schwache Magnetfelder ist die Intensität  $I_a$  ungefähr doppelt so groß wie im heutigen Fall (gestrichpunktete). Für niedrige Teilchenenergien kleiner als 500 MeV tritt auch hier wieder das Problem des zu geringen Stichprobenumfanges auf, wie es bereits in Abschnitt 5.6.1 erläutert.

### 5.6.3. Zonaler Quadrupol

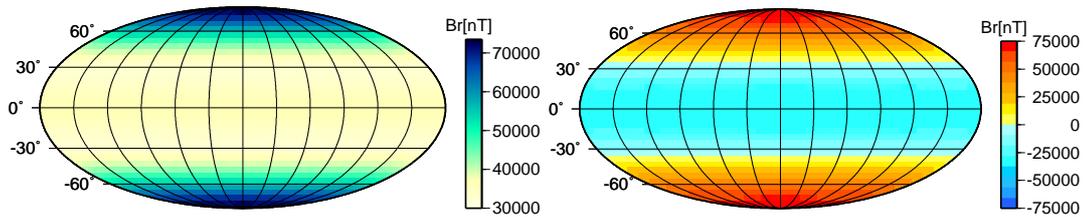
In Abschnitt 4.4.3 wurde das Magnetfeld eines zonalen Quadrupols ( $c_2^0$ ) vorgestellt. Der Betrag dieses Multipols ist an der Erdoberfläche wie auch beim zonalen Dipol symmetrisch bezüglich der Rotationsachse der Erde, wobei das Feld maximal an den Polen ist und minimal in den mittleren geographischen Breiten. Zur Äquatorebene hin steigt die Feldstärke wieder etwas an (Abbildung 5.8a). Wie in Abbildung 5.8b zu sehen ist, ist das Magnetfeld in den polaren und äquatorialen Regionen vorwiegend radial gerichtet, so daß hier die Teilchen bevorzugt einfallen. Abbildung 5.8c zeigt die Impaktgebiete für Teilchen mit einer Energie von 4 GeV in einem Feld der Stärke  $c_2^0 = 24500$  nT. Für den Fall eines zonalen Quadrupols werden zwei Cutoffbreiten definiert, die polare Cutoffbreite  $\beta_{cutoff1}$  und die äquatoriale Cutoffbreite  $\beta_{cutoff2}$ . In dem hier gezeigten Beispiel ist  $\beta_{cutoff1} = 55^\circ$  und  $\beta_{cutoff2} = 20^\circ$ . Der gestrichelte Bereich zeigt an, in welche Gebiete keine kosmischen Teilchen gelangen. Die Verteilung der Impaktgebiete ist symmetrisch zum Äquator.

Die Abhängigkeit der beiden Cutoffbreiten von der Teilchenenergie und der Magnetfeldstärke sind in Abbildung 5.8d zu sehen. Keine Teilchen gelangen in die Breiten, die zwischen den beiden Kurven liegen. Die durchgezogene Linie gibt die Cutoffbreiten für einen zonalen Quadrupol an, dessen Stärke der heutigen Dipolstärke entspricht. Die Umrechnung der Dipolstärke in die Quadrupolstärke geschieht über die magnetische Energie (siehe Abschnitt 2.2). Teilchen mit kinetischen Energien unterhalb von 100 MeV fallen vorwiegend in den polaren Regionen bis zu einer Breite von  $\beta = 70^\circ$  auf die Erde ein und in den äquatorialen Gegenden bis zu einer Breite von  $\beta = 10^\circ$  ein, während Teilchen mit kinetischen Energien größer als 8 GeV alle Gebiete auf der Erde erreichen. In kleineren Magnetfeldern ist dies bereits für Teilchen mit einer Energie von 2 GeV der Fall.

Dieses Verhalten spiegelt sich auch in der Impaktfläche wider (Abbildung 5.8e). Für Teilchenenergien kleiner als 100 MeV werden weniger als 20 % der Erdoberfläche erreicht. Für größere Energien muß unterschieden werden, wie stark das Feld ist, in dem sich die Teilchen bewegen. In großen Feldern ( $c_2^0 = 24500$  nT) ist die vollständige Überdeckung der Erde erst für eine Teilchenenergie von mehr als 8 GeV erreicht, in kleinen Feldern hingegen sind 2 GeV ausreichend.

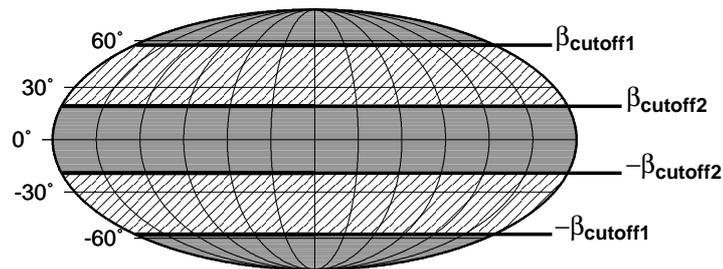
Auch hier gilt wie bei den vorangegangenen Magnetfeldkonfigurationen, daß bei geringeren Feldstärken zum einen auch in Gebiete Teilchen einfallen, in denen bei heutiger Feldstärke keine zu finden sind. Zum anderen treffen auch Teilchen mit niedrigeren Energien, die in stärkeren Feldern reflektiert werden, ebenfalls auf die Erde. Etwas ge-

## 5. Hochenergetische Teilchen in der Magnetosphäre

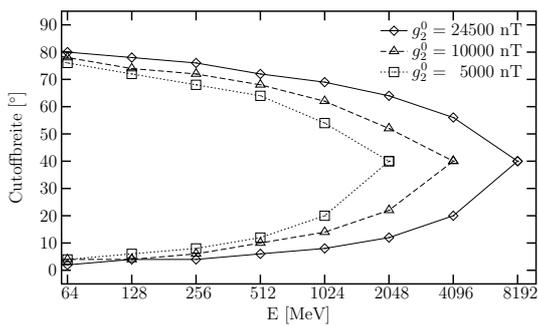


(a) Betrag des Magnetfeldes ( $c_2^0 = 24500$  nT).

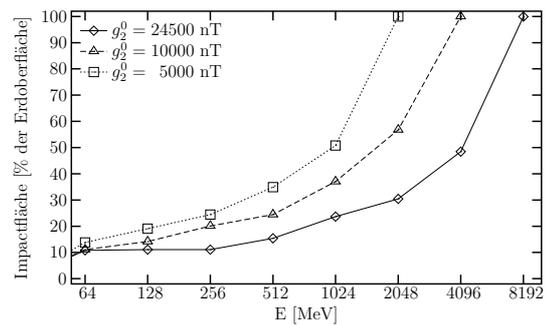
(b) Radialkomponente des Magnetfeldes.



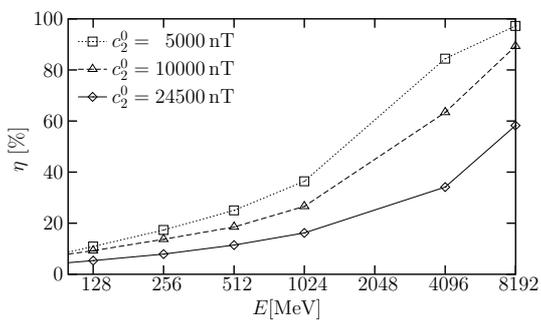
(c) Teilcheneinflussgebiete (Teilchenenergie 4 GeV).



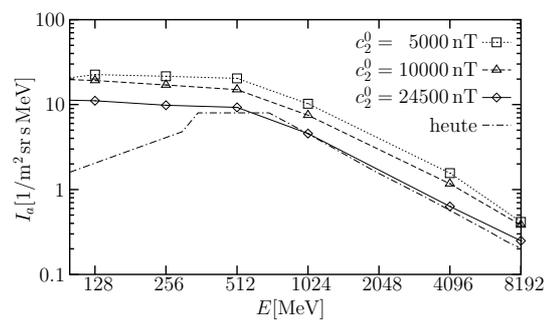
(d) Cutoffbreite.



(e) Impactfläche.



(f) Relativer Teilcheneinfall.



(g) Energiespektrum.

Abbildung 5.8.: Teilcheneinfall für eines zonalen Quadrupol.

nauer wird der Teilcheneinfall durch den relativen Teilcheneinfall  $\eta$  in Abbildung 5.8f und durch das Energiespektrum  $I_a$  der in die Atmosphäre eindringenden Teilchen in Abbildung 5.8g beschrieben. Für kleine Teilchenenergien bis zu 500 MeV gelangen weniger als 20 % der Nullfeldeinfallrate auf die Erde, während es bei großen Energien (8 GeV) je nach Magnetfeldstärke sogar 60-100 % sein können. Für alle Teilchenenergien nimmt der relative Teilcheneinfall mit schwächer werdendem Feld zu.

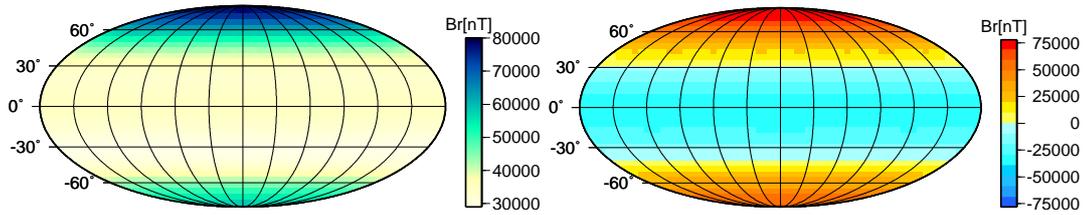
Abbildung 5.8g gibt das Energiespektrum  $I_a$  der in die Atmosphäre gelangenden Teilchen an. Die Kurvenverläufe für die drei Magnetfeldstärken der Quadrupolkonfiguration sind sich sehr ähnlich. Zum Vergleich ist das heutige Energiespektrum eingezeichnet (gestrichpunktete Linie). Bei einer zum heutigen Feld vergleichbaren Magnetfeldstärke  $c_2^0 = 24500$  nT fällt das Energiespektrum für Teilchenenergien größer 500 MeV mit dem heutigen Spektrum zusammen. Für schwächere Felder die Intensität  $I_a$  größer als heute. So ist sie z. B. für hohe Energien größer als 2 GeV ungefähr doppelt so hoch. Besonders starke Unterschiede gibt es für niedrige Teilchenenergien kleiner als 500 MeV. Die Abweichungen betragen für einzelne Teilchenenergien teilweise mehr als eineinhalb Größenordnungen. Der gesamte Energieeintrag in die Atmosphäre ist in Quadrupolmagnetosphären wesentlich größer als im heutigen Fall.

### 5.6.4. Dipol-Quadrupol-Konfiguration

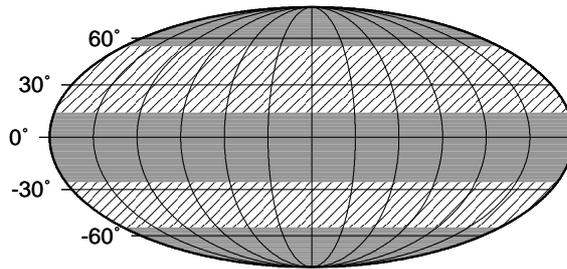
Das in dieser gemischten Konfiguration betrachtete Feld setzt sich aus einem schwachen Dipol ( $c_1^0 = 5000$  nT) und einem starken Quadrupol ( $c_2^0 = 23000$  nT) zusammen, wie bereits in Abschnitt 4.4.4 erläutert. Die Ähnlichkeiten dieser Konfiguration zur Quadrupolkonfiguration in Abschnitt 5.6.3 ist daher sowohl beim Magnetfeld an der Erdoberfläche als auch bei den Teilcheneinfällen in die Atmosphäre gegeben. Die magnetische Energie dieser Konfiguration ist vergleichbar mit der Energie des zonalen Quadrupols  $c_2^0 = 24500$  nT. Im Gegensatz zum reinen Quadrupolfall ist der Betrag des Magnetfeldes nicht symmetrisch zum Äquator. Das Maximum an einem Pol (in diesem Fall dem Nordpol) wird durch den Dipolanteil verstärkt, während es am anderen Pol abgeschwächt wird. Nahe dem Äquator befindet sich ein weiteres schwach ausgeprägtes, lokales Maximum. Die gleiche Asymmetrie findet sich in der Radialkomponente (Abbildung 5.9b) und schließlich auch in der Verteilung der Impaktgebiete (Abbildung 5.9c) wieder. Die Teilchen fallen vorwiegend in den polaren und in den äquatorialen Gebieten ein, wobei das äquatoriale Einfallgebiet nach Süden hin verschoben ist.

Auf Grund der Asymmetrie wird in dieser Magnetfeldkonfiguration auf die Bestimmung der Cutoffbreiten verzichtet und lediglich die Impaktfläche (Abbildung 5.9d) betrachtet. Diese gibt an, wie groß das von Teilchen getroffene Gebiet ist. Im Fall eines starken Feldes ( $c_1^0 = 5000$  nT und  $c_2^0 = 23000$  nT) ist die Impaktfläche ähnlich der eines reinen Quadrupols der Stärke  $c_2^0 = 24500$  nT, wie im vorangegangenen Abschnitt besprochen wurde. Teilchen mit niedrigen Energien von ungefähr 100 MeV treffen 10 % der Erdoberfläche, während Teilchen mit Energien größer als 8 GeV überall in die Atmosphäre gelangen. In einem schwachen Magnetfeld ( $c_1^0 = -2000$  nT und

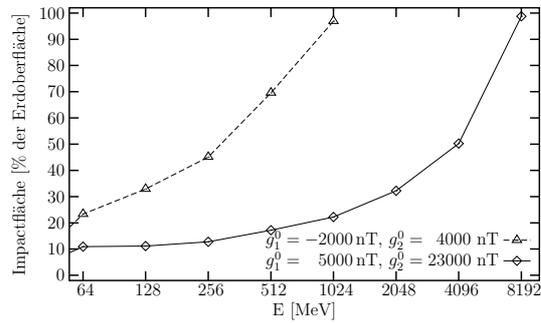
## 5. Hochenergetische Teilchen in der Magnetosphäre



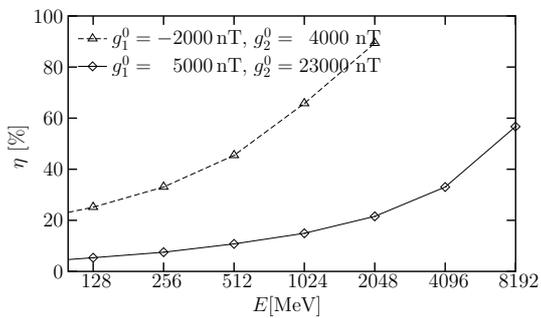
(a) Betrag des Magnetfeldes ( $c_1^0 = 5000 \text{ nT}$ ,  $c_2^0 = 23500 \text{ nT}$ ). (b) Radialkomponente des Magnetfeldes.



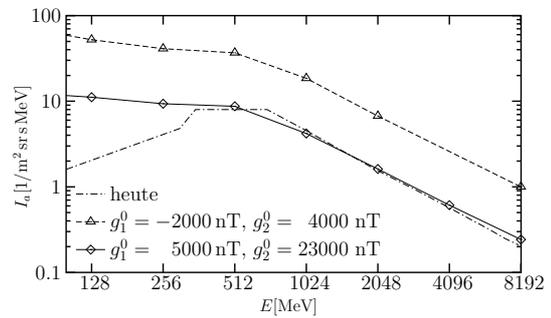
(c) Teilcheneinflussgebiete (Teilchenenergie 4 GeV).



(d) Impactfläche.



(e) Relativer Teilcheneinfall.



(f) Energiespektrum.

Abbildung 5.9.: Teilcheneinfall für eine Dipol-Quadrupol-Konfiguration.

$c_2^0 = 4000 \text{ nT}$ ), das einen ähnlichen Feldverlauf wie das starke Feld aufweist, erreichen bereits Teilchen mit einer Energie von 1 GeV die gesamte Erdoberfläche.

Der erhöhte Teilcheneinfall in die Erdatmosphäre wird durch den relativen Teilcheneinfall  $\eta$  und das Energiespektrum  $I_a$  näher beschrieben (Abbildung 5.9e und f). Wie zu erwarten ist, steigt der relative Teilcheneinfall mit zunehmender Teilchenenergie an. Im Fall des starken Magnetfeldes (durchgezogene Linie) ist der relative Teilcheneinfall ähnlich groß wie bei einer reinen Quadrupolkonfiguration, weil sich hier der Dipolanteil nur eine geringe Rolle spielt. Bei 8 GeV gelangen etwa 60 % der Teilchen in die Atmosphäre, die auch ohne Magnetfeld eindringen würden. Auf Grund der geringen Ausdehnung der Magnetosphäre ( $R_m = 9 R_e$  im Vergleich zu  $R_m = 13 R_e$  für das starke Magnetfeld) und der schwachen Feldstärke erreichen im zweiten Fall (gestrichelte Linie) wesentlich mehr Teilchen die Erde. Bei einer Teilchenenergie von 2 GeV beträgt der relative Teilcheneinfall bereits 90 %.

Für den Fall des starken Magnetfeldes (durchgezogene Linie in Abbildung 5.9f) ist das Energiespektrum vergleichbar mit dem Fall des reinen Quadrupols entsprechender Stärke. Für Energien größer als 500 MeV fällt das Spektrum mit dem heutigen Spektrum zusammen (gestrichpunktete Linie). Für kleinere Energien ist die Intensität bis zu einer Größenordnung höher. Im Fall des schwachen Magnetfeldes (gestrichelte Linie) sieht die Kurve des Energiespektrums ähnlich aus, ist aber für alle Energien im ungefähr eine Größenordnung nach oben verschoben.

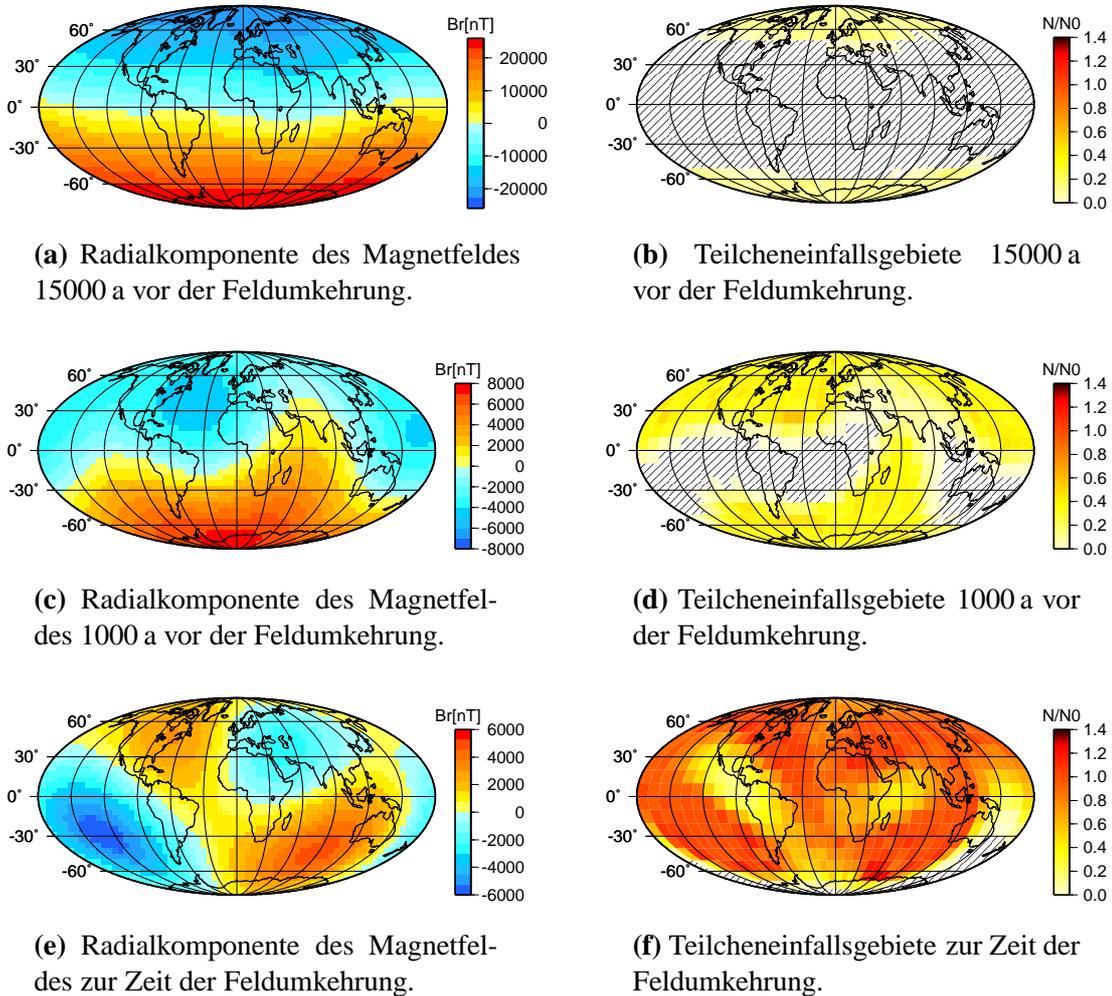
### 5.6.5. Simulierte Feldumkehrung

Numerische Simulationen (Glatzmaier und Roberts, 1995) bieten ein realistisches Bild über das Verhalten des Magnetfeldes während einer Feldumkehrung. Das Magnetfeld an der Erdoberfläche zu verschiedenen Zeitpunkten der Simulation wurde bereits in Abschnitt 4.4.5 beschrieben und in Abbildung 4.9 vorgestellt, so daß in diesem Abschnitt lediglich auf die Radialkomponente des Magnetfeldes eingegangen wird, die ja bereits Hinweise darauf liefert, in welche Gebiete Teilchen einfallen. Dargestellt sind wieder drei verschiedene Zeitpunkte der simulierten Feldumkehrung: 15000 und 1000 Jahre vor der Umkehrung sowie zum Zeitpunkt der Umkehrung.

Im ersten Fall, also 15000 Jahre vor der Umkehrung weist das Magnetfeld im wesentlichen dipolare Strukturen auf. An den Polen ist das Magnetfeld auf der Erdoberfläche radial, während es am Äquator tangential verläuft (Abbildung 5.10a). Somit dringen Teilchen vorwiegend an den Polen in die Atmosphäre ein, wie es auch beim heutigen Magnetfeld der Fall ist. Dargestellt sind hier die Gebiete, in die Teilchen mit der Energie von 256 MeV einfallen (Abbildung 5.10b). Dieses sind die polaren Regionen bis zu einer mittleren Breite von ungefähr  $60^\circ$ .

Auch 1000 Jahre vor der Umkehrung dominiert der Dipolanteil des Magnetfeldes noch, aber die höheren Multipole, hier insbesondere der Quadrupolanteil, treten nun in Erscheinung (Abbildung 5.10c). Der Betrag des Magnetfeldes ist auf ungefähr ein Drittel seiner Größe gesunken, so daß nun mehr Teilchen in die Atmosphäre eindringen können, die auch in Gebiete gelangen, die vorher nicht betroffen waren, wie Abbil-

## 5. Hochenergetische Teilchen in der Magnetosphäre



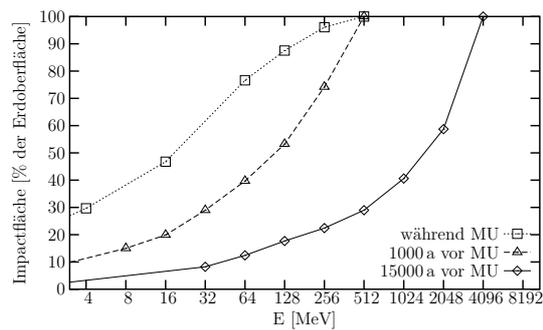
**Abbildung 5.10.:** Magnetfeld und Einfallgebiete für Teilchen mit einer Energie von 256 MeV während einer simulierten Feldumkehrung.

Abbildung 5.10d zu entnehmen ist. Es fallen immer noch mehr Teilchen in den polaren als in den äquatorialen Regionen ein. Fast die gesamte Erdoberfläche wird von Teilchen mit einer kinetischen Energie von 256 MeV getroffen, ausgenommen sind Äquatorregionen, wo die Radialkomponente des Magnetfeldes am schwächsten ist.

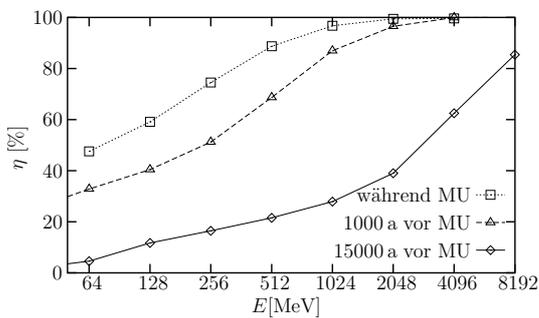
Während der Magnetfeldumkehrung spielen die höheren Multipolanteile eine größere Rolle als der Dipolanteil. Besonders ausgeprägt ist in diesem Fall der Quadrupolanteil  $c_2^1$ . Die Radialkomponente des Magnetfeldes weist im Südpazifik und im Südindien sowie in Nordamerika und Osteuropa ein Maximum auf (Abbildung 5.10e). Diese sind auch die Gebiete, in denen die meisten Teilchen mit einer Energie von 256 MeV in die Atmosphäre eindringen (Abbildung 5.10f). Wenige Teilchen gelangen hingegen bei Mittelamerika und Australien auf die Erde.

Wieviele Gebiete von Teilchen getroffen werden, wird mit der Impaktfläche beschrieben, wie sie in Abbildung 5.11a angegeben ist. Die durchgezogene Linie gibt die Impaktfläche 15000 Jahre vor der Feldumkehrung an. Es gelangen kaum Teilchen mit einer Energie unter 50 MeV auf die Erde. Bei einer Energie von 1 GeV werden knapp über 40 % der Erdoberfläche von Teilchen getroffen und bei Energien größer als 4 GeV die gesamte Oberfläche. Bei den schwachen Magnetfelder 1000 Jahre vor (gestrichelte Linie) und während der Magnetfeldumkehrung (gepunktete Linie) gelangen sogar Teilchen mit Energien von wenigen MeV überall in die Atmosphäre. Bereits bei Teilchenenergien von 10 MeV wird über ein Viertel der Erdoberfläche von diesen Teilchen getroffen und bei Energien über 500 MeV ist es die komplette Erdoberfläche.

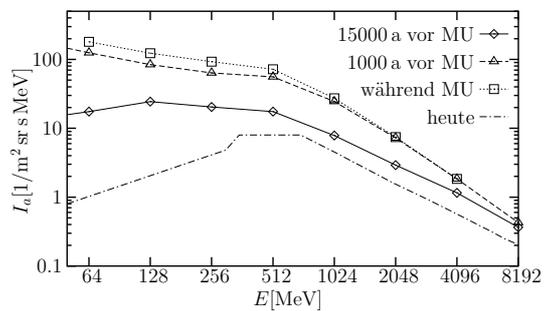
Während der Magnetfeldumkehrung fallen zum einen mehr Teilchen ein und zwar auch in Gebiete, die in „normalen“ Zeiten nicht betroffen sind. Zum anderen gelangen aber auch Teilchen mit niedriger Energie in die Atmosphäre, die sonst in der Magnetosphäre abgelenkt und reflektiert werden. Auch Teilchen, die sich ohne Magnetfeld geradlinig an der Erde vorbeibewegen, werden nun von der Magnetosphäre eingefangen und erreichen ebenfalls die Erde. Der relative Teilcheneinfall  $\eta$  und das Energiespektrum  $I_a$  geben nähere Informationen darüber, wieviele Teilchen in die Erdatmosphäre



(a) Impaktfläche.



(b) Relativer Teilcheneinfall.



(c) Energiespektrum.

Abbildung 5.11.: Teilcheneinfall während einer simulierten Feldumkehrung.

re eindringen. Zum Zeitpunkt 15000 Jahre vor der Feldumkehrung überwiegt der Dipolanteil. Dementsprechend verhält sich auch der relative Anteil (durchgezogene Linie in Abbildung 5.11b). Für Energien kleiner als 500 MeV gelangen weniger als 20 % der Teilchen in die Atmosphäre, die ohne Magnetfeld eindringen würden. Bei Energien von 8 MeV sind es bereits über 80 %. Während der Feldumkehrung (gepunktete Linie) und 1000 Jahre davor (gestrichelte Linie) erreichen wesentlich mehr Teilchen die Erde. Für Energien kleiner als 500 MeV liegt der Teilchenbeitrag bereits bei über 60 % der Nullfeldeinfallrate und für Energien größer als 2 GeV bei 100 %.

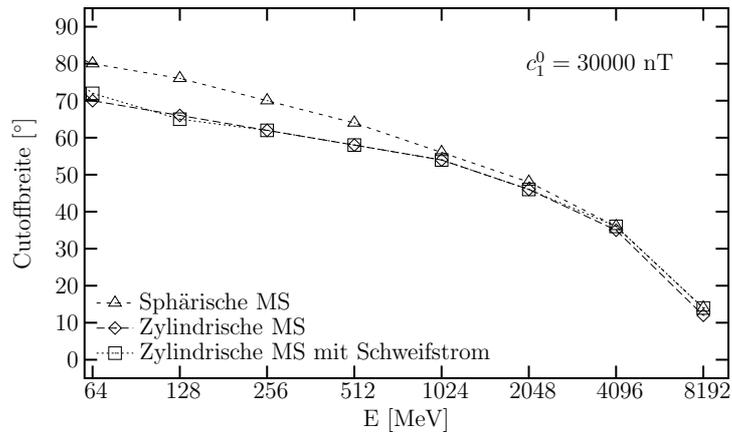
Da das Magnetfeld 15000 Jahre vor der simulierten Polumkehrung eine geringere Feldstärke aufweist als heute, ist die Intensität der einfallenden Teilchen höher (durchgezogene Linie in Abbildung 5.11c). Für Energien größer als 500 MeV unterscheiden sich die Spektren um einen Faktor von zwei. Für kleinere Energien beträgt die Differenz eine Größenordnung. Die Energiespektren ist für 1000 Jahre vor der Umkehrung (gestrichelte Linie) und zum Zeitpunkt der Feldumkehrung (gepunktete Linie) sehr ähnlich. Für niedrige Teilchenenergien (<500 MeV) ist die Intensität der in die Atmosphäre eindringenden Teilchen bis zu zwei Größenordnungen höher als heute (gestrichelte Linie). Für höhere Energien ist die Intensität nur doppelt so hoch im heutigen Fall. Der Energieeintrag in die Atmosphäre durch kosmische Strahlung ist während einer Magnetfeldumkehrung um ein vielfaches größer als es heute der Fall ist.

### 5.7. Einfluß des Magnetosphärenmodells auf die Teilcheneinfälle

In Abschnitt 5.6 wurden Teilcheneinfälle für verschiedene Magnetfeldkonfigurationen untersucht. Dabei zeigte sich, daß die Betrachtung der Radialkomponente des Magnetfeldes an der Erdoberfläche bereits gute Hinweise liefert, in welche Gebiete Teilchen eindringen. In Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, daß das Magnetfeld an der Erdoberfläche sich in den meisten Fällen gut durch einfachere Modelle, wie die Multipolentwicklung oder das sphärische Magnetosphärenmodell beschreiben läßt.

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit die Wahl des Modells sich auf die Teilcheneinfälle in die Atmosphäre auswirken. Dazu werden für ein zonales Dipolfeld der heutigen Stärke  $c_1^0 = 30000$  nT die Cutoffbreiten für die verschiedenen Modelle untersucht. Von besonderem Interesse ist bei dieser Untersuchung der Einfluß der Schweifgeometrie. Deshalb werden das zylindrische Modell mit Vakuumfeld ( $\lambda = 1$ ), das zylindrische Modell mit gestreckten Feldlinien im Schweif ( $\lambda = 0$ ) und das sphärische Modell verglichen. Abbildung 5.12 zeigt die Cutoffbreiten aufgetragen über den Teilchenenergien.

Die Kurven für die beiden zylindrischen Magnetosphären sind nahe zu gleich. Der Verlauf der Kurve für die sphärische Magnetosphäre weicht für Teilchenenergien kleiner als 1 GeV signifikant von diesen ab. Daraus kann man schließen, daß für hochenergetische Teilchen mit Energien größer als 1 GeV die genau Form der Magnetosphäre

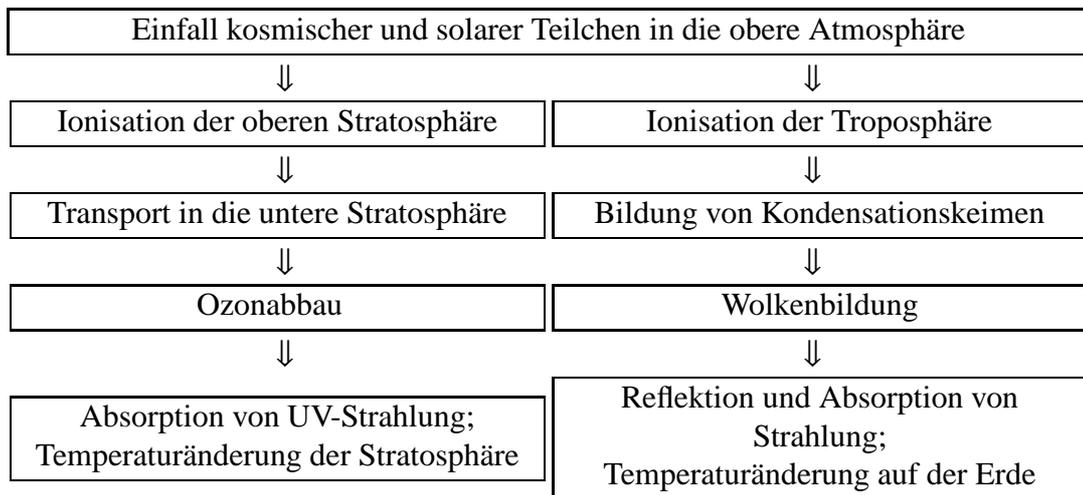


**Abbildung 5.12.:** Einfluß der Magnetosphärenform auf die Cutoffbreiten für verschiedene Teilchenenergien in einem zonalen Dipolfeld.

keine Rolle mehr spielt. Diese Teilchen gelangen ohne wesentliche Ablenkung durch die Lorentzkraft in den Bereich, wo die Abweichungen der einzelnen Modelle hinreichend klein sind (siehe Abschnitt 4.5). Für Energien kleiner als 1 GeV macht sich die Komprimierung der Magnetfeldlinien durch die sphärische Geometrie bemerkbar. Das einfache Modell der sphärische Magnetosphäre stellt somit keine gute Alternative zum zylindrischen Modell dar. Die Geometrie des Schweifes hingegen zeigt keine Auswirkungen im untersuchten Energiebereich, denn im Schweif ist das Magnetfeld so klein, daß die Teilchen es ohne Ablenkung durchqueren können. Es kann also darauf verzichtet werden, die Schweifströme durch Streckung der Feldlinien zu modellieren. Damit wird auch gerechtfertigt, daß nicht der gesamte Schweif in die Startkugel eingeschlossen wird (siehe Abschnitt 5.4).

## 5.8. Auswirkungen des Teilcheneinfalls auf die Atmosphäre

Das Klima der Erde wird durch die in die Erdatmosphäre einfallende Strahlung, sowie durch ihre dortige Absorption und Abstrahlung bestimmt. Ändert sich eine dieser Größen, so wirkt sich dies auf das gesamte Klima der Erde aus. Abbildung 5.13 zeigt mögliche Konsequenzen des kosmische Strahlungseinfalls auf das Erdklima. Solare und kosmische Teilchen mit einer Energie kleiner als 1 GeV gelangen im heutigen Magnetfeld bis in die obere Stratosphäre in einer Höhe von 40 km über dem Erdboden, wo sie die neutrale Atmosphäre ionisieren und über verschiedene Prozesse in die untere Stratosphäre transportiert werden. Höher energetische Teilchen oder Ionen aus Sekundärprozessen können auch in die Troposphäre eindringen, die sich bis zu einer Höhe von etwa 20 km über dem Erdboden erstreckt. Die Ionisation der Atmosphäre in verschiedenen Höhen hat unterschiedliche Prozesse zur Folge.



**Abbildung 5.13.:** Auswirkungen der kosmischen Strahlung auf das Klima.

Das Wettergeschehen der Erde und somit auch die Wolkenbildung spielt sich im wesentlichen in den unteren Schichten der Atmosphäre, also der Troposphäre ab. Aus Beobachtungen von Svensmark und Friis-Christensen (1997) geht hervor, daß die Wolkenbildung mit dem Einfall kosmischer Strahlung korreliert. Zur Entstehung einer Wolke reicht es nicht aus, den Wasserdampfgehalt in der Luft zu übersättigen, sondern es werden noch sogenannte Kondensationskeime benötigt, an denen der Wasserdampf kondensiert und somit Wassertropfen ausbildet. Primäre Teilchen, die als Kondensationskeime in Frage kommen, sind Staub- oder Salzteilchen. Sekundäre Teilchen sind Moleküle verschiedener Spurengase. Eine besondere Rolle spielt dabei die übersättigte gasförmige Phase der Schwefelsäure (Arnold et al., 2004). Durch den Einfall hochenergetischer Teilchen werden die neutralen Teilchen der Atmosphäre ionisiert.

Aus diesen molekularen Ionen bilden sich sogenannte Ionencluster, die durch Anlagerung von Schwefelsäure zu Kondensationskeimen heranwachsen. Da Schwefelsäure in hohem Maße hygroskopisch ist, lagern sich Wasserdampfmoleküle an und bilden Wassertropfen bzw. Wolken. Wolken reflektieren zum einen das Sonnenlicht und begrenzen somit die Aufwärmung der Erde durch direkte Sonneneinstrahlung. Zum anderen absorbieren sie aber auch die infrarote Strahlung, die von Erdboden und den Ozeanen aus abgestrahlt wird und tragen somit zum Treibhauseffekt bei (Svensmark, 1998). Welcher dieser beiden Effekte überwiegt, hängt von der Höhe und der Zusammensetzung der Wolken ab. Vereinfacht kann man sagen, daß dünne Wolken in großer Höhe zur Erwärmung beitragen, während dichte Wolken in geringeren Höhen zur Abkühlung der Erde führen.

Bei der Ionisation in der oberen Stratosphäre (Quack et al., 2001) werden die Hauptbestandteile der Atmosphäre Stickstoff  $N_2$ , Sauerstoff  $O_2$  und Wasser  $H_2O$  in die Stickoxide  $NO_x$  und die Wasserstoff-Sauerstoffverbindungen  $HO_x$  umgewandelt. Durch die chemische Reaktionen, an denen  $HO_x$  und Ozon  $O_3$  beteiligt sind, wird das Ozon in der oberen Stratosphäre abgebaut. Da  $HO_x$  mit einer Lebensdauer von wenigen Tagen sehr kurzlebig ist, wird es nicht in weitere Transportprozesse eingebunden. Der Ozonabbau durch diesen Prozeß ist also lokal und zeitlich begrenzt. Anders hingegen verhält sich das  $NO_x$ , dessen Lebensdauer mehrere Wochen bis wenige Monate umfaßt. Durch die globale Zirkulation wird das  $NO_x$  in die Polregionen transportiert und gelangt dort durch die polaren Wirbel im jeweiligen Polarwinter in tiefere Höhen um die 30 km über dem Erdboden. In dieser Höhe ist die Ozonkonzentration besonders hoch, so daß die chemischen Reaktionen, an denen  $NO_x$  und Ozon beteiligt sind, sehr effektiv zum dortigen Ozonabbau beitragen (Sinnhuber et al., 2003). Die Ozonschicht wirkt zum einen wie ein Filter für UV-Strahlung auf die Erde, und zum anderen beeinflußt das Ozon auch die Temperatur in der Stratosphäre.

In einem zonalen Dipolfeld der heutigen Stärke dringen hochenergetische Teilchen vorwiegend in den Polregionen in die Atmosphäre ein, und es entsteht  $NO_x$ . Während des polaren Winters wird das  $NO_x$  in geringere Höhen nach unten transportiert und trägt dort zum Ozonabbau bei. Dieser Prozeß kann auf Grund der Langlebigkeit des  $NO_x$  bis zu mehrere Monate andauern.

Reduziert man nun das Magnetfeld, so dringen zwar mehr Teilchen am Pol ein, aber es gelangen auch Teilchen in niedrige Breiten, unter Umständen sogar bis in äquatoriale Breiten. Die Ionisation der Atmosphäre findet also nicht nur an den Polen statt, sondern überall auf der Erde. Durch die globale Zirkulation wird das  $NO_x$  aus den niedrigen Breiten zu den Polen transportiert und gelangt dort durch die polaren Wirbel in tiefere Schichten, wo es zum Ozonabbau kommt. Der Ozonabbau in den Polregionen wird hierdurch also verstärkt (Sinnhuber et al., 2003). Zusätzlich zu diesem Effekt ist auch ein Ozonabbau in niedrigeren Breiten zu beobachten. Dieser hat seine Ursache darin, daß die energiereichen Teilchen in einem reduzierten Feld auch in tiefere Schichten gelangen können und dort zum Ozonabbau beitragen.

Bei der Pole-on-Situation eines Magnetfeldes, das von der gleichen Stärke ist wie das heutige Dipolfeld, dringen Teilchen hauptsächlich in der Äquatorregion in die Atmosphäre ein. Durch die globale Zirkulation wird das  $\text{NO}_x$  in die Polregionen transportiert und gelangt dort in tiefere Höhen, wo es zum Ozonabbau beiträgt. Da auf Grund der begrenzten Lebensdauer nicht alle  $\text{NO}_x$ -Moleküle in die Polregionen gelangen, um an den dortigen Transportprozessen in tiefere Schichten teilzunehmen, ist der Ozonabbau an den Polen in der Stratosphäre somit geringer als im heutigen Feld (Sinnhuber et al., 2003).

Bei einem schwachen Magnetfeld während einer Feldumkehrung spielen gleich mehrere Aspekte eine Rolle. Zum einen gelangen mehr Teilchen in die Atmosphäre als heute, und die Verteilung der Teilchen beschränkt sich nicht nur auf die polaren Regionen. Es können also mehr Teilchen zu den Polen transportiert werden, wo sie in tiefere Höhen gelangen, in denen der Ozonabbau stattfindet. Zum anderen wird die Erde nicht mehr so stark durch das Magnetfeld geschützt und die Teilchen gelangen in geringere Höhen, wo sie unmittelbar zum Ozonabbau beitragen können. Beides führt zu einem verstärkten Ozonabbau. Die Regenerationsphasen, in denen sich das Ozon neu aufbauen kann, werden kürzer und es kann dementsprechend weniger Ozon neu gebildet werden. In der Ozonschicht entstehen also nicht nur kurzzeitige „Löcher“, wie bei heutigen großen solaren Ereignissen, sondern es kann passieren, daß die Ozonschicht längerfristig abgebaut wird. Die Zeit für die Regenerierung des Ozons wird unter den heutigen Bedingungen mit Tagen bis Monaten angesetzt. Zu Zeiten einer Magnetfeldumkehrung kann die Zeitspanne Jahre bis Jahrzehnte betragen. Mögliche Folgen eines verstärkten Ozonabbaus sind zum einen eine Erhöhung der UV-Strahlung, die sich auf den Strahlungshaushalt der Erde auswirkt, aber auch unmittelbar auf biologische Prozesse. Zum anderen ändert sich aber auch die Temperatur in der Stratosphäre (Sinnhuber et al., 2003). Durch die Abkühlung bzw. Aufheizung der Stratosphäre ändert sich auch die Zirkulation der atmosphärischen Luftschichten, was signifikante Klimaschwankungen zur Folge haben kann.

Eine Verstärkung der einfallenden kosmischen Strahlung auf die Erde wirkt sich auch auf die Wolkenbildung aus, so daß es je nach Zusammensetzung und Lokation der Wolken entweder zur Erwärmung oder Abkühlung einzelner Gebiete der Erde kommt. Wie oben gezeigt, beeinflußt der Einfall kosmischer Teilchen in die Atmosphäre das Klima und somit auch die Lebensbedingungen auf der Erde in erheblichem Maße. Die hochenergetische Strahlungen auf die Erde hängt von vielen Faktoren ab, wie z. B. der Sonnenaktivität und das Erdmagnetfeld. Um diese komplizierten Zusammenhänge und Auswirkungen besser zu verstehen, sind weitere Untersuchungen wünschenswert und notwendig.

## 6. Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Arbeit wird der Frage nachgegangen, wie sich eine Magnetfeldumkehrung auf das System Erde auswirkt. Abbildung 1.1 skizziert die Auswirkung einer solchen Feldumkehrung. Hierbei stellen sich mehrere Fragen: Wie sieht das innere Magnetfeld der Erde während einer Polumkehrung aus? Wie wirkt sich das paläomagnetische Feld auf die Struktur und Größe der Magnetosphäre aus? Welcher Effekt ergibt sich daraus für kosmische Teilchen, die in die Magnetosphäre gelangen? Und was folgt letztendlich daraus für die atmosphärischen Prozesse und das Erdklima? Ein wesentlichen Beitrag zu diesem Fragenkomplex wird in der hier vorliegenden Arbeit geleistet. Zum einen werden an Hand eines einfachen Modells magnetosphärische Magnetfelder während einer Magnetfeldumkehrung untersucht. Zum anderen wird in einer ausführlichen Studie der Einfall kosmischer Teilchen betrachtet, die von außen in die Magnetosphäre und gegebenenfalls in die Erdatmosphäre gelangen.

Was braucht man, um solche Paläomagnetosphären zu untersuchen? Zum einen wird die Kenntnis über das innere Magnetfeld der Erde während einer Polumkehrung benötigt, zum anderen ist ein Modell zur Beschreibung der Magnetosphäre erforderlich. Die Grundlagen zur Beschreibung des inneren und äußeren (magnetosphärischen) Magnetfeldes der Erde werden in Kapitel 2 erläutert. Das innere Magnetfeld der Erde wird von hochkomplexen dynamischen Systemen im Erdinneren erzeugt, auf die in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird. Ist man lediglich an einer Beschreibung dieses Magnetfeldes interessiert, so bietet sich die Multipolentwicklung an, wie sie Abschnitt 2.1 ausführlich besprochen wird. Das heutige Feld wird im wesentlichen durch einen Dipol repräsentiert, während die höheren Multipole eine untergeordnete Rolle spielen. Das Magnetfeld der Erde ist nicht statisch, sondern unterliegt diversen kurz- und langperiodischen Schwankungen. Die kurzperiodischen Variationen sind meistens externen Ursprungs, sie können beispielsweise durch Änderungen der Sonnenaktivität verursacht werden. Die langperiodischen Schwankungen gehen auf dynamischen Prozesse im Erdinneren zurück. In Abschnitt 2.3 werden die Magnetfeldänderungen der letzten hundert Jahre betrachtet. Zu erkennen ist dabei eine Abnahme des Dipolanteils und eine Zunahme der höheren Multipolanteile. Um Informationen über Magnetfeldkonfigurationen während einer Polumkehr zu erhalten (siehe Abschnitt 2.4), reicht es nicht aus, sich die zeitliche Entwicklung des Magnetfeldes in den letzten Jahrzehnten anzuschauen und für die nächsten Jahrhunderte zu extrapolieren, sondern man muß zum einen auf Ergebnisse paläomagnetischer Messungen (Williams und Fuller, 1981; Clement, 1991; Merrill und McFadden, 1999) und zum anderen auf numerische Si-

mulationen zurückgreifen, wie sie von Glatzmaier und Roberts (1995) durchgeführt wurden. Ergebnisse dieser Simulationen werden neben anschaulichen Standardkonfigurationen auch in dieser Arbeit verwendet. Zu den Standardkonfigurationen gehören der zonale Dipol, der Pole-on-Dipol und der zonale Quadrupol.

Als Voraussetzung für die Untersuchungen von Paläomagnetosphären ist ein flexibles Modell zur Beschreibung der Magnetosphäre erforderlich. Abschnitt 2.5 beschreibt in Grundzügen die heutige Magnetosphäre mit ihren Stromsystemen. Jordan (1994) und Siscoe (2001) stellen in ihren Arbeiten die gängigsten Magnetosphärenmodelle vor. In Abschnitt 2.6 werden diese Modelle zusammengefaßt und unter dem Gesichtspunkt betrachtet, inwiefern sie sich für die Ziele der hier vorliegenden Arbeit eignen. Als besonders geeignet erweisen sich das potentialtheoretischen Modell von Willis et al. (2000) und jenes von Voigt (1981). Das Modell von Willis et al. (2000) ist eins der wenigen Modelle, die auch höhere Multipole einschließt, dafür nimmt es eine kugelsymmetrische Geometrie in Kauf. Besonders das Modell von Voigt (1981) bietet sich auf Grund seiner zylindrischen Geometrie und der verhältnismäßig einfachen mathematischen Beschreibung zur Berechnung von Paläomagnetosphären an. Der Nachteil ist, daß das Modell lediglich einen Dipol für das innere Magnetfeld der Erde ansetzt.

Um ein Modell zur Verfügung zu haben, das sowohl eine realistische Magnetosphärengeometrie als auch höhere Multipole für das innere Erdmagnetfeld bietet, wird in dieser Arbeit das Modell von Voigt (1981) um einen zusätzlichen Quadrupolanteil erweitert. Einen Ansatz für die Hinzunahme weiterer Multipole wird ebenfalls gegeben. Kapitel 3 widmet sich der ausführlichen Beschreibung und Erweiterungen dieses Modells. Die Magnetosphäre wird durch einen Zylinder beschrieben, der auf der Tagseite durch eine Halbkugel abgeschlossen ist. Die Erde befindet sich innerhalb dieser Halbkugel. Das innere Erdmagnetfeld wird durch ein Dipol- und Quadrupolfeld wiedergegeben. Das äußere Magnetfeld setzt sich aus dem Feld der Chapman-Ferraro- und der Schweifströme zusammen. Das Magnetfeld der Schweifströme wird durch eine Streckung der Feldlinien im Schweif modelliert. Aus der Streckung der Feldlinien kann eine Stromverteilung im Schweif bestimmt werden. Vergleiche mit MHD-Simulationen Vogt et al. (2004) und Zieger et al. (2004) zur Beschreibung von Magnetosphären zeigen, daß das in dieser Arbeit verwendete Magnetfeldmodell ausreichend ist, um eine korrekte Beschreibung der Paläomagnetosphären zu erhalten.

Kapitel 4 geht ausführlich auf die Beschreibung der Magnetfelder und Feldlinienverläufe innerhalb der Magnetosphäre ein. Dabei werden zuerst technische Aspekte behandelt, wie die Berechnung der Feldlinien (Abschnitt 4.1) und die Bestimmung der Magnetosphärengröße für verschiedene Magnetfeldkonfigurationen und -stärken (Abschnitt 4.2). Die Möglichkeit, das Magnetfeld für unterschiedliche Magnetfeldstärken zu skalieren und somit den Rechenaufwand zu verringern, wird in Abschnitt 4.3 dargestellt. Der zweite Teil dieses Kapitels (Abschnitt 4.4), beschäftigt sich mit der Anwendung des Modells auf mögliche Paläomagnetosphären. Dabei werden idealisierte Magnetfeldkonfigurationen betrachtet, wie der zonale Dipol, der Pole-on-Dipol, der zonale Quadrupol und eine Kombination aus zonalem Dipol und Quadrupol. All diese Konfigurationen werden für unterschiedliche Multipolstärken untersucht. Gezeigt

werden Feldlinienverläufe sowohl für eine geschlossene Magnetosphäre als auch eine offene. Bei offenen Magnetosphären wird das Magnetfeld innerhalb der Magnetosphäre zusätzlich noch von der Orientierung des interplanetaren Magnetfeldes beeinflusst. Eine weitere interessante Größe ist der Stromverlauf im Schweif, der sich bei einer Streckung der Schweiffeldlinien ergibt. Neben den idealisierten Standardkonfigurationen werden auch Ergebnisse numerischer Simulationen von Magnetfeldumkehrungen (Glatzmaier und Roberts, 1995) untersucht. Dargestellt werden hier die Magnetfelder 15000 und 1000 Jahre vor der Feldumkehrung sowie zum Zeitpunkt der Umkehrung. 15000 Jahre vor der Umkehrung bestimmt der Dipolanteil das Magnetfeld der Erde. Während der Polumkehrung hat der Dipolanteil soweit abgenommen, daß er in der gleichen Größenordnung wie der Quadrupol ist. In Abschnitt 4.5 wird das magnetosphärische Magnetfeld für verschieden Magnetfeldmodelle verglichen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf dem zylindrische Modell, das in dieser Arbeit hauptsächlich verwendet wird, dem sphärische Modell von Willis et al. (2000) und der Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre. Es stellt sich heraus, daß sich der Magnetfeldbetrag einer Multipolentwicklung ohne Magnetosphäre bis zu einem Abstand von  $0.4 R_s$ , wobei  $R_s$  die Standoffdistanz ist, nicht mehr als 3% vom Feld einer zylindrische Magnetosphäre unterscheidet. Die Winkelabweichungen sind bei dieser Entfernung geringer als  $1.5^\circ$ . Vergleicht man mit einer sphärischen Magnetosphäre, werden diese Abweichungen bereits in einem Abstand von  $0.25 R_s$  erreicht. Für große Magnetosphären hat die Wahl des Magnetosphärenmodells also keinen Einfluß auf den erdnahen Raum. Anders sieht es hingegen für kleine Magnetosphären aus. Beträgt z. B. die Standoffdistanz weniger als vier Erdradien, so wird sich die Wahl des Modells auch auf das Magnetfeld an der Erdoberfläche auswirken. Für große Magnetosphären würde es sich anbieten, für sehr rechenintensive Betrachtungen in Erdnähe auf die Multipolentwicklung zurückzugreifen. Die sphärische Magnetosphäre von Willis et al. (2000) eignet sich nur sehr bedingt zur Beschreibung des magnetosphärischen Magnetfeldes. Hier macht sich die starke Komprimierung der Feldlinien auf allen Seiten und der fehlende Schweif bemerkbar.

Der zweite Fragenkomplex betrifft die kosmischen Teilchen, die in eine Paläomagnetosphäre eindringen. Das Modell wird hierbei als Werkzeug zur Berechnung von Teilchenbahnen benutzen. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Kapitel 5 zu finden. Die ersten Abschnitte dieses Kapitels behandeln technische Aspekte, wie die Berechnung von Teilchenbahnen (Abschnitt 5.1) und die Möglichkeit, die Bahnen für unterschiedliche Magnetfeldstärken zu skalieren (Abschnitt 5.2). In dieser Arbeit werden kosmische Protonen, in einem Energiebereich von 10 MeV bis 8 GeV betrachtet. Abschnitt 5.3 erläutert die Eigenschaften dieser Teilchengruppe. Die Bahnen dieser Teilchen starten auf einer Kugel außerhalb der Magnetosphäre (Abschnitt 5.4) mit einer homogene Verteilung sowohl der Startorte als auch der Startgeschwindigkeitsvektoren. Zur besseren Erfassung der Teilchen, die in die Erdatmosphäre eindringen, werden in Abschnitt 5.5 die Begriffe der Cutoffbreite, der Impactfläche, des relativen Teilcheneinfalls und des Energiespektrums eingeführt. Abschnitt 5.6 stellt die Ergebnisse für unterschiedliche Paläosituationen vor. Auch hier werden wieder die Standard-

konfigurationen sowie die unterschiedliche Zeitschritte der numerischen Simulationen von Glatzmaier und Roberts (1995) untersucht. Zwei Aspekte kristallisieren sich bei der Teilchenbetrachtung in Paläomagnetfeldern heraus: Zum einen gelangen Teilchen auch in Gebiete, in die heute keine Teilchen eindringen. Zum anderen treffen auch Teilchen mit niedriger Energie, die in stärkeren Feldern reflektiert werden, auf die Erde. Beide Prozesse tragen zu einer Erhöhung des Teilchenflusses in die Atmosphäre bei. Der Fluß der einfallenden Teilchen ist bis zu zwei Größenordnungen höher als im heutigen Fall. In Abschnitt 5.7 wird untersucht, wie sich die Wahl des Magnetosphärenmodells auf den Teilcheneinfall auswirkt. Verglichen wird die Cutoffbreite für einen zonalen Dipol heutiger Feldstärke für das zylindrische Magnetfeldmodell ohne gestreckte Schweiffeldlinien, das gleiche Modell mit gestreckten Feldlinien im Schweif und als drittes für die sphärische Magnetosphäre von Willis et al. (2000). Dabei ergibt sich, daß die Cutoffbreite für die zylindrische Modell mit und ohne Streckung der Feldlinien nahezu identisch sind. Die Cutoffbreiten für die sphärische Magnetosphäre hingegen weichen für niedrige Teilchenenergien ab. Das zeigt zum einen, daß die Existenz eines Schweifes auf die Teilcheneinfälle erheblichen Einfluß hat. Zum anderen wird aber auch deutlich, daß der exakte Verlauf der Feldlinien im Schweif für Teilchen des hier betrachteten Energiebereiches keine Rolle spielt.

Es stellt sich heraus, daß die Verteilung und die Stärke der Teilcheneinfälle in die Atmosphäre sich in Paläosituationen erheblich von den heutigen Verhältnissen unterscheiden. In Abschnitt 5.8 werden die Auswirkung auf atmosphärische Prozesse angedeutet, wie z. B. die Ionisation der neutralen Atmosphäre. Chemische Reaktionen und Transportprozesse führen je nach Magnetfeldkonfiguration zu einem verstärkten oder verringerten Ozonabbau, was Auswirkungen auf die UV-Strahlung und das globale Klima der Erde haben kann, z. B. Veränderungen in der Temperatur und der Zirkulation der Atmosphäre. Auch korreliert die Wolkenbildung mit dem Einfall kosmischer Teilchen in die Erdatmosphäre, was wiederum eine Aufheizung oder Abkühlung der Erde zur Folge hat. Somit beeinflusst der Einfall hochenergetischer Teilchen das Klima und damit auch die Lebensbedingungen auf der Erde.

In dieser Arbeit ist es gelungen, ein ausführliches Bild über das magnetosphärische Magnetfeld und die Teilcheneinfälle während einer Magnetfeldumkehrung zu erhalten. Die Untersuchung von möglichen Magnetfeldkonfigurationen und den daraus resultierenden Teilcheneinfällen in die Atmosphäre sind nicht nur für paläomagnetische Felder der Erde interessant, sondern auch für Magnetfelder anderer Planeten unseres Sonnensystems und extrasolarer Planeten. Eine besondere Klasse extrasolarer Planeten stellen diejenigen dar, die auf Grund ihrer gebundenen Rotation über ein schwaches Magnetfeld verfügen (Grißmeier et al., 2004). Für diese Planeten sind von der Erde stark abweichende Teilcheneinfälle zu erwarten.

# A. Mathematische Hilfsmittel

## A.1. Koordinatensysteme und -transformationen

Je nach Geometrie werden in dieser Arbeit kartesische, sphärische oder zylindrische Koordinaten mit folgender Notation verwendet (siehe auch Abbildung A.1):

Kartesische Koordinaten:  $x, y, z$ ,

Sphärische Koordinaten:  $r, \vartheta, \lambda$  mit  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  und  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ ,

Zylindrische Koordinaten:  $\rho, \phi, z$  mit  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

Die Transformationen zwischen den einzelnen Koordinatensystemen sind unter anderem bei Bronstein und Semendjajew (1989) zu finden.

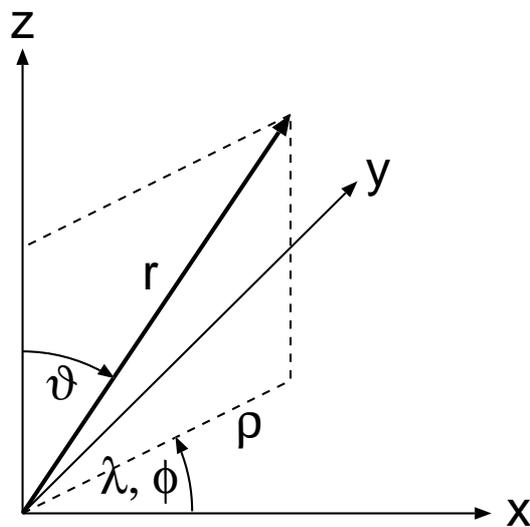


Abbildung A.1.: Koordinatensysteme.

### Transformationen zwischen kartesischen und sphärischen Koordinaten

Transformation der Orte:

$$x = r \sin \vartheta \cos \lambda, \quad y = r \sin \vartheta \sin \lambda, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (\text{A.1})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \lambda = \arctan \frac{y}{x}. \quad (\text{A.2})$$

Transformation der Vektoren:

$$\begin{aligned} v_x &= v_r \sin \vartheta \cos \lambda + v_\vartheta \cos \vartheta \cos \lambda - v_\lambda \sin \lambda, \\ v_y &= v_r \sin \vartheta \sin \lambda + v_\vartheta \cos \vartheta \sin \lambda + v_\lambda \cos \lambda, \\ v_z &= v_r \cos \vartheta - v_\vartheta \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} v_r &= v_x \sin \vartheta \cos \lambda + v_y \sin \vartheta \sin \lambda + v_z \cos \vartheta, \\ v_\vartheta &= v_x \cos \vartheta \cos \lambda + v_y \cos \vartheta \sin \lambda - v_z \sin \vartheta, \\ v_\lambda &= -v_x \sin \lambda + v_y \cos \lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

### Transformationen zwischen kartesischen und zylindrischen Koordinaten

Transformation der Orte:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z, \quad (\text{A.5})$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z. \quad (\text{A.6})$$

Transformation der Vektoren:

$$v_x = v_\rho \cos \phi - v_\phi \sin \phi, \quad v_y = v_\rho \sin \phi + v_\phi \cos \phi, \quad v_z = v_z, \quad (\text{A.7})$$

$$v_\rho = v_x \cos \phi + v_y \sin \phi, \quad v_\phi = -v_x \sin \phi + v_y \cos \phi, \quad v_z = v_z. \quad (\text{A.8})$$

### Transformationen zwischen sphärischen und zylindrischen Koordinaten

Transformation der Orte:

$$\rho = r \sin \vartheta, \quad \phi = \lambda, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (\text{A.9})$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad \lambda = \phi. \quad (\text{A.10})$$

### Nabla- und Laplaceoperator

In kartesischen Koordinaten:

$$\nabla = \underline{e}_x \frac{d}{dx} + \underline{e}_y \frac{d}{dy} + \underline{e}_z \frac{d}{dz}, \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}, \quad (\text{A.12})$$

In sphärischen Koordinaten:

$$\nabla = \underline{e}_r \frac{d}{dr} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{d}{d\vartheta} + \underline{e}_\lambda \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{d}{d\lambda}, \quad (\text{A.13})$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{d^2}{d\lambda^2}, \quad (\text{A.14})$$

In zylindrischen Koordinaten:

$$\nabla = \underline{e}_\rho \frac{d}{d\rho} + \underline{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\phi} + \underline{e}_z \frac{d}{dz}, \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2}{dz^2}. \quad (\text{A.16})$$

## A.2. Kugelfunktionen

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften und Anwendungen der Kugelfunktionen erläutert, die bei den Berechnungen und Herleitungen der Magnetfeldmodelle verwendet werden. Mehr zu Kugelfunktionen ist bei Abramowitz und Stegun (1972) oder Kertz (1983) zu finden.

### A.2.1. Eigenschaften der Kugelfunktionen

Die zonalen Kugelfunktionen, auch als Legendre-Polynome erster Art bekannt, sind Polynome n-ten Grades. Eine Darstellung der zonalen Kugelfunktionen ist durch die Rodrigues-Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{A.17})$$

gegeben. Die zugeordneten Kugelfunktionen gehen aus dieser Gleichung durch m-fache Differentiation hervor:

$$P_n^m(x) = p_n^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} p_n^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n, \quad (\text{A.18})$$

mit  $P_n^m(x) = 0$  für  $m > n$ , wobei  $m$  die Ordnung des Polynoms angibt.

Der Faktor  $p_n^m$  ist ein Normierungsfaktor, der in der Geophysik üblicherweise nach der Schmidtschen Normierung den Wert  $p_n^m = \sqrt{2(n-m)!/(n+m)!}$  besitzt. Für unnormierte Kugelfunktionen gilt  $p_n^m = 1$ .

In der Multipolentwicklung und dem Magnetosphärenmodell nach Willis werden Kugelfunktionen in der Schmidtschen Normierung verwendet, im Magnetosphärenmodell nach Voigt hingegen unnormierte Kugelfunktionen.

Berechnen lassen sich die Kugelfunktionen entweder mittels Gleichung (A.18) oder aber durch die Rekursionsbeziehungen:

$$P_n^m(x) = p_n^m T_n^m(x), \quad (\text{A.19a})$$

$$T_n^m = 0, \text{ wenn } m > n, \quad (\text{A.19b})$$

$$T_m^m(x) = (2m - 1)!!(1 - x)^{m/2}, \quad (\text{A.19c})$$

$$T_n^m(x) = \frac{(2n - 1)}{n - m} x T_{n-1}^m(x) + \frac{n + m - 1}{n - m} T_{n-2}^m(x), \quad (\text{A.19d})$$

$$2 \frac{dT_n^m(x)}{d\vartheta} = (n + m)(n - m + 1) T_n^{m-1}(x) - T_n^{m+1}(x). \quad (\text{A.19e})$$

Ausgegangen wird dabei von Gleichung (A.19c), mit der man  $T_m^m$  explizit berechnen kann. Mit Hilfe von Gleichung (A.19d) wird nun schrittweise  $T_{m+1}^m$  bis  $T_n^m$  berechnet und mit dem Normierungsfaktor multipliziert.

Bei dieser Art der Berechnung wird nicht nur der gesuchte Term  $P_n^m$  berechnet, sondern alle Terme bis zum Grad  $n$ . Da man bei der Kugelfunktionsentwicklung auf sämtliche Terme zurückgreifen muß, bietet es sich an, vor der eigentlichen Anwendung alle  $P_n^m$ -Werte an dem entsprechenden Ort zu berechnen und abzuspeichern, statt die Berechnungen jedesmal neu zu starten. Die Zeitersparnis beträgt dabei einen Faktor 4-5.

Die Orthogonalitätsrelation der zugeordneten Kugelfunktionen in der Schmidtschen Normierung, die bei der Berechnung der magnetischen Energie in Abschnitt 2.2 verwendet wird, lautet:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx &= \int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta) P_k^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{2}{2n + 1} \cdot \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k, m = 0 \\ 2, & n = k, 1 \leq m \leq n. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Folgende Ableitungen der unnormierten Kugelfunktionen ( $p_n^m = 1$ ), die im Voigt-Modell ausgenutzt werden, lassen sich mit Hilfe von Gleichung (A.18) aufstellen:

$$P_n'(x) = \frac{d}{dx} P_n(x) = \frac{1}{p_n^1(1 - x^2)^{1/2}} P_n^1(x) \stackrel{x=\cos \vartheta}{=} \frac{1}{p_n^1 \sin \vartheta} P_n^1(\cos \vartheta), \quad (\text{A.21})$$

$$P_n''(x) = \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) = \frac{1}{p_n^2(1 - x^2)} P_n^2(x) \stackrel{x=\cos \vartheta}{=} \frac{1}{p_n^2 \sin^2 \vartheta} P_n^2(\cos \vartheta). \quad (\text{A.22})$$

### A.2.2. Erzeugende Funktion und einige Ableitungen

Die erzeugende Funktion der Kugelfunktionen ist durch die Beziehung

$$\frac{1}{(1+h^2-2hx)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x), \quad |h| < 1 \quad (\text{A.23})$$

gegeben. Speziell in der Herleitung des Magnetosphärenmodells in Kapitel 3 schreibt sich diese Gleichung dann als

$$\frac{1}{(1+(\frac{b}{r})^2+2\frac{b}{r}\cos\vartheta)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^n P_n(\cos\vartheta), \quad \left|\frac{b}{r}\right| < 1. \quad (\text{A.24})$$

Für die nachstehenden Ableitungen, die ihre Anwendung ebenfalls in der Herleitung des Magnetosphärenmodells finden, werden unnormierte Kugelfunktionen verwendet, so daß  $p_n^1 = p_n^2 = 1$  gilt.

Ableitung der Gleichung (A.24) nach  $\cos\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{b}{r}}{(1+(\frac{b}{r})^2+2\frac{b}{r}\cos\vartheta)^{3/2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^n P'_n(\cos\vartheta) \stackrel{(\text{A.21})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^n \frac{P_n^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \\ \frac{\sin\vartheta}{(1+(\frac{b}{r})^2+2\frac{b}{r}\cos\vartheta)^{3/2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-1} P_n^1(\cos\vartheta) \\ &\stackrel{P_{0=0}^1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-1} P_n^1(\cos\vartheta) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Ableitung der Gleichung (A.24) nach  $\frac{b}{r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{b}{r} + \cos\vartheta}{(1+(\frac{b}{r})^2+2\frac{b}{r}\cos\vartheta)^{3/2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-n) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-1} P_n(\cos\vartheta) \\ \frac{\frac{b}{r} + \cos\vartheta}{(1+(\frac{b}{r})^2+2\frac{b}{r}\cos\vartheta)^{3/2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-1} P_n(\cos\vartheta) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Zweifache Ableitung der Gleichung (A.24) nach  $\cos\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \frac{-3\frac{b}{r}}{(1+2\frac{b}{r}\cos\vartheta+(\frac{b}{r})^2)^{5/2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-1} P''_n(\cos\vartheta) \stackrel{(\text{A.22})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-1} \frac{P_n^2(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} \\ \frac{\sin^2\vartheta}{(1+(\frac{b}{r})^2+2\frac{b}{r}\cos\vartheta)^{5/2}} &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n^2(\cos\vartheta) \\ &\stackrel{P_{0=0}^1}{=} \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n^2(\cos\vartheta) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Zweifache Ableitung der Gleichung (A.24) nach  $\frac{b}{r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{2(1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta) - 3 \sin^2 \vartheta}{(1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta)^{5/2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n(\cos \vartheta) \\ \frac{1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta}{(1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta)^{5/2}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Ableitung der Gleichung (A.24) nach  $\cos \vartheta$  und  $\frac{b}{r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{-3(\frac{b}{r} + \cos \vartheta)}{(1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta)^{5/2}} &= - \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P'_n(\cos \vartheta) \\ \frac{(\frac{b}{r} + \cos \vartheta) \sin \vartheta}{(1 + (\frac{b}{r})^2 + 2\frac{b}{r} \cos \vartheta)^{5/2}} &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n^1(\cos \vartheta) \\ &\stackrel{P_{0=0}^1}{=} \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \left(-\frac{b}{r}\right)^{n-2} P_n^1(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

### A.2.3. Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen

Die auf einer Kugeloberfläche gegebene Funktion  $f(\vartheta, \lambda)$  lässt sich durch eine Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen darstellen:

$$f(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \vartheta). \quad (\text{A.30})$$

Hierbei sind  $P_n^m$  die zugeordneten Kugelfunktionen in der Schmidtschen Normierung. Um die Koeffizienten  $a_n^m$  und  $b_n^m$  zu bestimmen wird diese Gleichung mit  $\cos k\lambda$  bzw.  $\sin k\lambda$  und mit  $P_n^m(\cos \vartheta)$  multipliziert und anschließend über die Kugeloberfläche integriert:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\vartheta, \lambda) \begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int_0^{\pi} \left( a_n^m \begin{Bmatrix} \sin m\lambda \cos k\lambda \\ \cos m\lambda \sin k\lambda \end{Bmatrix} + b_n^m \begin{Bmatrix} \sin m\lambda \cos k\lambda \\ \cos m\lambda \sin k\lambda \end{Bmatrix} \right) d\lambda \\ &\quad \cdot \int_0^{\pi} P_n^m(\cos \vartheta) P_l^k(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Zur Lösung der beiden Integrale (das erste werde mit  $I_\lambda$  und das zweite mit  $I_\vartheta$  bezeichnet) werden die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen und der

Kugelfunktionen ausgenutzt. Mit

$$\int_0^{2\pi} \cos ax \cos bx \, dx = \begin{cases} 0, & a \neq b \\ 2\pi, & a = b = 0 \\ \pi, & a = b > 0 \end{cases}, \quad (\text{A.33})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin ax \sin bx \, dx = \begin{cases} 0, & a \neq b \\ 0, & a = b = 0 \\ \pi, & a = b > 0 \end{cases}, \quad (\text{A.34})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos ax \sin bx \, dx = 0 \quad (\text{A.35})$$

lautet die Lösung des ersten Integrals

$$I_\lambda = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ a_n^k \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 2\pi \end{smallmatrix} \right\} & m = k = 0 \\ a_n^k \left\{ \begin{smallmatrix} 2\pi \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} + b_n^k \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 2\pi \end{smallmatrix} \right\}, & m = k > 0 \end{cases}. \quad (\text{A.36})$$

Von der Summe über  $m$  bleibt lediglich der Term  $m = k$  übrig, so daß das zweite Integral der Orthogonalitätsrelation für Kugelfunktionen entspricht mit der Lösung

$$I_\vartheta = \int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta) P_l^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \cdot \begin{cases} 0, & n \neq l \\ 1, & n = l, m = 0 \\ 2, & n = l, m > 0. \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

Damit bleibt auch von der Summe über  $n$  nur der Term  $n = l$  übrig und die Gleichung (A.32) sieht dann wie folgt aus:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\vartheta, \lambda) \begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda \quad (\text{A.38})$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} \left( a_n^k \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + b_n^k \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right). \quad (\text{A.39})$$

Durch Auflösen nach den Koeffizienten  $a_n^m$  und  $b_n^m$  lassen sich diese bestimmen:

$$\begin{Bmatrix} a_n^m \\ b_n^m \end{Bmatrix} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\vartheta, \lambda) \begin{Bmatrix} \cos k\lambda \\ \sin k\lambda \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda. \quad (\text{A.40})$$

### A.3. Besselfunktionen

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften und Anwendungen der Besselfunktionen beschrieben, die bei den Berechnungen und Herleitungen der Magnetfeldmodelle verwendet wurden. Eine ausführliche Behandlung der Besselfunktionen ist bei Abramowitz und Stegun (1972) oder Kertz (1983) zu finden.

### A.3.1. Eigenschaften der Besselfunktionen

Berechnen lassen sich die Besselfunktionen direkt aus der Potenzreihenentwicklung

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (\text{A.41})$$

oder aber über folgende Rekursionsformeln:

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}, \quad (\text{A.42})$$

$$J'_n = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1}) = J_{n-1} - \frac{n}{x} J_n. \quad (\text{A.43})$$

Sind  $a_i$  die Nullstellen der Besselfunktion  $J_n(x)$ , dann lautet die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^1 x J_n(a_i x) J_n(a_j x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{1}{2} [J'_n(a_i)]^2, & i = j. \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Sind  $b_i$  die Nullstellen der Besselfunktionskombination  $AxJ'_n(x) + BJ_n(x)$ , wobei  $A, B \neq 0$  beliebig sind, dann ist die Orthogonalitätsrelation durch

$$\int_0^1 x J_n(b_i x) J_n(b_j x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{2} ([J'_n(b_i)]^2 + [1 - (\frac{n}{b_i})^2] [J_n(b_i)]^2), & i = j \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

gegeben.

### A.3.2. Fourier-Bessel-Reihenentwicklung

Im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  lassen sich Funktionen durch eine Fourier-Bessel-Reihenentwicklung darstellen:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(a_i), \quad (\text{A.46})$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i J_n(b_i), \quad (\text{A.47})$$

deren Koeffizienten mittels der Orthogonalitätsrelationen berechnet werden. Hierzu multipliziert man beide Seiten der Gleichungen mit  $xJ_n(a_j x)$ , bzw.  $xJ_n(b_j x)$  und inte-

griere über  $x$  im Intervall  $[0; 1]$ :

$$\int_0^1 x J_n(a_j x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_0^1 x J_n(a_j x) J_n(a_i) dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{[J'_n(a_i)]^2}{2} \delta_{ij}, \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_n(b_j x) f(x) dx &= \sum_{i=1}^{\infty} d_i \int_0^1 x J_n(b_j x) J_n(b_i) dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} d_i \frac{([J'_n(b_i)]^2 + [1 - (\frac{n}{b_i})^2][J_n(b_i)^2])}{2} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Auf Grund der Orthogonalität fallen bis auf den Summanden  $i = j$  alle anderen Summanden weg. Aufgelöst nach  $c_i$  bzw.  $d_i$  ergeben sich dann die Koeffizienten der Fourier-Bessel-Reihenentwicklung:

$$c_i = \frac{2}{[J_{n+1}(a_i)]^2} \int_0^1 t f(t) J_n(a_i t) dt, \quad (\text{A.50})$$

$$d_i = \frac{2}{[1 - (\frac{n}{b_i})^2][J_n(b_i)]^2} \int_0^1 t f(t) J_n(b_i t) dt. \quad (\text{A.51})$$

Entwickelt man die radialen Funktionen  $g_j(\rho)$ , die bei der Herleitung des Magnetsphärenmodells nach Voigt auftauchen, in Fourier-Bessel-Reihen der Art

$$g_j(\rho) = g_j(\rho, k) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{j,i} J_k\left(\frac{x_{k,i} \rho}{R_m}\right), \quad (\text{A.52})$$

wobei  $x_{k,i}$  die Nullstellen der ersten Ableitung der Besselfunktionen sind, so errechnen sich die Koeffizienten  $a_{j,i}$  aus der Orthogonalisierungsbedingung zu

$$a_{j,i} = \frac{2}{R_m^2 [1 - (\frac{k}{x_{k,i}})^2][J_k(x_{k,i})]^2} \int_0^{R_m} g_j(\rho) J_k\left(\frac{x_{k,i} \rho}{R_m}\right) \rho d\rho. \quad (\text{A.53})$$



# Literaturverzeichnis

- ABRAMOWITZ, M. UND STEGUN, I.A., *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York, 9. Ausgabe, 1972.
- ALEXEEV, I.I. UND KALEGAEV, V.V., *Magnetic field and plasma flow structure near the magnetopause*, J. Geophys. Res., 100, 1995, S. 19267–19275.
- ALEXEEV, I.I., *Regular magnetic field in the Earth's magnetosphere*, Geom. and Aeron., 18, 1978, S. 656. auf russisch.
- ARNOLD, F., WILHELM, S., PIRJOLA, L., UND HUNTRIESER, H., *Cosmic ray mediated formation of atmospheric aerosols and cloud condensation nuclei: Implications from the first detection of large negative and positive ions in the upper troposphere*, EGU First General Assembly, Nice 25-30 April 2004, , 2004. Abstract EGU04-A-02191.
- BAUMJOHANN, W. UND TREUMANN, R.A., *Basic space plasma physics*, Imperial College Press, London, 1996, Kap. 2+3.
- BIEBER, J.W., EROSHENKO, E., EVENSON, P., FLÜCKIGER, E.O., UND KALLENBACH, R., Hrsg., *Cosmic Rays and Earth*, Kluwer Academic Press, 2000.
- BIERNAT, H. K., KÖMLE, N. I., UND LICHTENBERGER, H. I. M., *Analytical two-dimensional model of a quadrupole magnetosphere*, Planet. Space Sci., 33, 1985, S. 45–52.
- BIRDSALL, C.K. UND LANGDON, A.B., *Plasma physics via computer simulation*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1985, Kap. 1.
- BÖHM, W. UND GOSE, G., *Einführung in die Methoden der numerischen Mathematik*, ViewegVerlag, Braunschweig, 1. Ausgabe, 1977.
- BRONSTEIN, I.N. UND SEMENDJAJEW, K.A., *Taschenbuch der Mathematik*, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 24. Ausgabe, 1989.
- CAMPBELL, W.H., *Introduction to geomagnetic fields*, Cambridge University Press, 1997.
- CHAPMAN, S. UND BARTELS, J., *Geomagnetism*, Oxford University Press, London, 3. Ausgabe, 1962.

- CHOE, J.Y., BEARD, D.B., UND SULLIVAN, E.C., *Precise calculation of the magnetopause surface for a tilted dipole*, Planet. Space Sci., 21, 1973.
- CLEMENT, B. M., *Geographical distribution of transitional VGP's: Evidence for non-zonal equatorial symmetry during the Matuyama-Brunhes geomagnetic reversal*, Earth Planet. Sci. Lett., 104, 1991, S. 48.
- CLEMENT, B. M., *Dependence of the duration of geomagnetic polarity reversals on site latitude*, Nature, 428, 2004, S. 637–640.
- CRUTZEN, P.J., ISAKSEN, I.S.A., UND REID, G.C., *Solar proton events: stratospheric sources of nitric oxide*, Science, 189, 1975, S. 457–459.
- GAUSS, C.F., *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins im Jahre 1838*, Leipzig, Deutschland, 1839.
- GLASSMEIER, K.-H. UND SCHOLER, M., Hrsg., *Plasmaphysik im Sonnensystem*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991.
- GLATZMAIER, G. A. UND ROBERTS, P. H., *Rotation and magnetism of Earth's inner core*, Science, 274, 1995, S. 1887–1891.
- GOMBOSI, T.I., DEZEEUW, D.L., HÄBERLI, R.M., UND POWELL, K.G., *Three-dimensional multiscale MHD model of cometary plasma environments*, J. Geophys. Res., 101, 1996, S. 15,233–15,253.
- GRIESSMEIER, J.-M., STADELMANN, A., PENZ, T., LAMMER, H., SELSIS, F., RIBAS, I., GUINAN, E. F., MOTSCHMANN, U., BIERNAT, H. K., UND WEISS, W. W., *The effect of tidal locking on the stellar wind–magnetosphere interaction of “Hot Jupiters”*, Astronomy and Astrophysics, 425, 2004, S. 753–762.
- GROSSER, J., GLASSMEIER, K.-H., UND STADELMANN, A., *Induced magnetic field effects at planet Mercury*, Planet. Space Sci., , 2004. submitted.
- HEUNEMANN, C., KRASA, D., SOFFEL, H. C., GUREVITCH, E., UND BACHTADSE, V., *Directions and intensities of the Earth's magnetic field during a reversal: results from the Permo-Triassic Siberian trap basalts, Russia*, Earth and Planetary Science Letters, 218, 2004, S. 197–213.
- HILMER, R.V. UND VOIGT, G.-H., *A magnetospheric magnetic field model with flexible current systems driven by physical parameters*, J. Geophys. Res., 100, 1995, S. 5613–5626.
- JACKSON, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York, 1963.
- JACOBS, J.A., *Geomagnetism*, Band 3, Academic Press, 1989.

- JORDAN, C.E., *Empirical models of the magnetospheric magnetic field*, Rev. Geophys., 32, 1994, S. 139–157.
- KALLENRODE, M.-B., *Galactic Cosmic Rays*, in The outer heliosphere: beyond the planets, Scherer, K., Fichtner, H., und Marsch, E., Hrsg., Copernicus Ges. Katlenburg-Lindau, 2000, S. 165–190.
- KALLENRODE, M., *Spezifikation Teilchenpopulationen und atmosphärische Wirksamkeit*. Persönliche Mitteilung, April 2001.
- KERTZ, W., *Potentialtheorie in der Geophysik*. Vorlesungsskript, Institut für Geophysik und Meteorologie, TU-Braunschweig, 1983.
- KERTZ, W., *Einführung in die Geophysik I+II*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1992.
- KERTZ, W., *Geschichte der Geophysik*, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1999.
- LANGEL, R.A. UND ESTES, R.H., *A geomagnetic field spectrum*, Geophys. Res. Lett., 9, 1982, S. 250.
- LANGEL, R.A., *The main field*, in Geomagnetism, Jacobs, J.A., Hrsg., Academic press, 1987.
- LENSE, J., *Kugelfunktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G., Leipzig, 1954.
- LEONHARDT, R., MATZKA, J., UND MENOR, E. A., *Absolute paleointensities and paleodirections of miocene and pliocene lavas from Fernando de Noronha, Brazil*, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 139, 2003, S. 285–303.
- LEUBNER, M. P. UND ZOLLNER, K., *The quadrupole magnetopause*, J. Geophys. Res., 90, 1985, S. 8265–8268.
- LOWES, F.J., *Mean-square values on sphere of spherical harmonic vector fields*, J. Geophys. Res., 71, 1966, S. 2179.
- MAUERSBERGER, P., *Das Mittel der Energiedichte des geomagnetischen Hauptfeldes an der Erdoberfläche und seine säkularen Änderungen*, Gerlands Beiträge zur Geophysik, 65, 1956, S. 207–215.
- MAUS, S., ROTHER, M., HOLME, R., LUEHR, H., OLSEN, N., UND HAAK, V., *First scalar magnetic anomaly map from CHAMP satellite data indicates weak lithospheric field*, Geophys. Res. Lett., 29, 2002.
- MEAD, G. D. UND BEARD, D. B., *Shape of the geomagnetic field solar wind boundary*, J. Geophys. Res., 69, 1964, S. 1169–1179.

- MEAD, G. D. UND FAIRFIELD, D. H., *A quantitative magnetospheric model derived from spacecraft magnetometer data*, J. Geophys. Res., 80, 1975, S. 523–534.
- MERRILL, R.T., McELHINNY, M.W., UND McFADDEN, P.L., *The magnetic field of the Earth*, Academic Press, 1996.
- MERRILL, R. T. UND McFADDEN, P. L., *Geomagnetic polarity transitions*, Rev. Geophys., 37, 1999, S. 201–226.
- MEYER, P., RAMATY, R., UND WEBBER, W.R., *Cosmic rays - astronomy with energetic particles*, Physics today, 10, 1974, S. 23–32.
- MOTSCHMANN, U., *Numerische Simulationen im Plasma*. Vorlesung, Institut für Geophysik und Meteorologie, TU-Braunschweig, WS 1996/97.
- OLSON, W.P. UND PFITZER, K.A., *Magnetospheric magnetic field modeling*, Annual scientific report, Air Force Off. of Sci. Res., , 1977.
- OLSON, W.P. UND PFITZER, K.A., *A dynamic model of the magnetospheric and electric fields for July 29, 1977*, J. Geophys. Res., 87, 1982, S. 5943–5948.
- PRESS, W.H. ET AL., *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 2. Ausgabe, 1992.
- PRÖLSS, W.G., *Physik des nahen Weltraums*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- QUACK, M., KALLENRODE, M.-B., VON KÖNIG, M., KÜNZI, K., BURROWS, J., HEBER, B., UND WOLFF, E., *Ground level events and consequences for stratospheric chemistry*, in Proceedings of ICRC 2001, Copernicus Gesellschaft, 2001.
- ROEDERER, J.G., HILTON, H.H., UND SCHULZ, M., *Drift shell splitting by internal geomagnetic multipoles*, J. Geophys. Res., 78, 1973, S. 133–144.
- ROMASHCHENKO, Y.A. UND RESHETNIKOV, P.D., *Simple analytical model of the magnetosphere*, International Journal of Geomagnetism and Aeronomy, 2, 2000, S. 105–108.
- SAITO, T., SAKURAI, T., UND YUMOTO, K., *The Earth's paleomagnetosphere as the third type of planetary magnetospheres*, Planet. Space Sci., 26, 1978, S. 413–422.
- SIEBERT, M., *Auswirkungen der säkularen Änderungen der erdmagnetischen Hauptfeldes auf Form und Lage der Magnetosphäre und die Stärke der erdmagnetischen Aktivität*, Abhandlungen der Braunschweigischen wissenschaftlichen Gesellschaft, 37, 1977, S. 281–310.
- SINNHUBER, M., BURROWS, J.P., CHIPPERFIELD, M.P., JACKMAN, C.H., KALLENRODE, M.-B., KUENZI, K.F., UND QUACK, M., *A model study of the impact of magnetic field structure on atmospheric composition during solar proton events*, Geophys. Res. Lett., 30, 2003.

- SISCOE, G. L. UND CHEN, C.-K., *The paleomagnetosphere*, J. Geophys. Res., 80, 1975, S. 4675–4680.
- SISCOE, G.L., *70 years of magnetospheric modeling*, in Space weather, Song, P., Singer, H.J., und Siscoe, G.L., Hrsg., Band 125, Geophysical Monograph, 2001, S. 211–227.
- SMART, D.F., SHEA, M.A., UND FLÜCKIGER, *Magnetospheric models and trajectory computations*, Space Sci. Rev., 93, 2000, S. 271–298.
- SMART, D.F. UND SHEA, M.A., *A comparison of the Tsyganenko model predicted and measured geomagnetic cutoff latitudes*, Adv. Space Res., 28, 2001, S. 1733–1738.
- SOFFEL, H.C., *Paläomagnetismus und Archäomagnetismus*, Springer-Verlag, 1992.
- STARICHENKO, S.V. UND SHCHERBAKOV, V.P., *Inverse Magnetosphere*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 321, 1991, S. 69–74. auf russisch.
- STERN, D.P., *Parabolic harmonics in magnetospheric modeling: The main dipole and the ring current*, J. Geophys. Res., 90, 1985, S. 10851–10863.
- STOER, J. UND BULIRSCH, R., *Einführung in die Numerische Mathematik II*, Springer-Verlag, Berlin, 2. Ausgabe, 1978.
- SVENSMARK, H. UND FRIIS-CHRISTENSEN, E., *Variation of cosmic ray flux and global cloud coverage—a missing link in solar-climate relationship*, J. Atmos. Terr. Phys., 59, 1997, S. 1225–1232.
- SVENSMARK, H., *Influence of cosmic ray on Earth's climate*, Physical Review Letters, 81, 1998, S. 5027–5030.
- TSYGANENKO, N.A. UND USMANOV, A.V., *Determination of the magnetospheric current system parameters and development of experimental geomagnetic field models based on data from IMP and HEAS satellites*, Planet. Space Sci., 30, 1982, S. 985–998.
- TSYGANENKO, N. A., *Global quantitative model of the geomagnetic field in the cislunar magnetosphere for different disturbance levels*, Planet. Space Sci., 35, 1987, S. 1347.
- TSYGANENKO, N. A., *A magnetospheric magnetic field model with a warped tail current sheet*, Planet. Space Sci., 37, 1989, S. 5–20.
- TSYGANENKO, N. A., *A model of the near magnetosphere with a dawn-dusk asymmetry. I. Mathematical structure*, J. Geophys. Res., 107, 2002.
- VOGT, J., ZIEGER, B., STADELMANN, A., GLASSMEIER, K.-H., GOMBOSI, T., HANSEN, K.C., UND RIDLEY, A., *MHD simulations of quadrupolar paleomagnetospheres*, J. Geophys. Res., , 2004. submitted.

- VOGT, J. UND GLASSMEIER, K.-H., *On the location of trapped particle populations in quadrupole magnetospheres*, J. Geophys. Res., 105, 2000, S. 13063–13071.
- VOGT, J. UND GLASSMEIER, K.-H., *Modelling the paleomagnetosphere: strategy and first results*, Adv. Space Res., 28, 2001, S. 863–868.
- VOIGT, G.-H., BEHANNON, K. W., UND NESS, N. F., *Magnetic field and current structures in the magnetosphere of Uranus*, J. Geophys. Res., 92, 1987, S. 15337–15346.
- VOIGT, G.-H. UND NESS, N. F., *The magnetosphere of Neptune: Its response to daily rotation*, Geophys. Res. Lett., 17, 1990, S. 1705–1708.
- VOIGT, G.-H., *A three dimensional, analytical magnetospheric model with defined magnetopause*, Zeitschrift für Geophysik, 38, 1972, S. 319–346.
- VOIGT, G.-H., *Ein mathematisches Magnetosphärenmodell mit sechs unabhängigen Parametern*, Doktorarbeit, TU Braunschweig, 1976.
- VOIGT, G.-H., *A mathematical magnetospheric field model with independent physical parameters*, Planet. Space Sci., 29, 1981, S. 1–20.
- WICHT, J. UND OLSON, P., *A detailed study of the polarity reversal mechanism in a numerical dynamo model*, Geochem. Geophys. Geosyst., 5, 2004.
- WICHT, J., *Paleomagnetic Interpretation of Dynamo Simulations*, Geophys. J. Int., , 2003. submitted.
- WILLIAMS, I. UND FULLER, M., *Zonal harmonic models of reversal transition fields*, J. Geophys. Res., 86, 1981, S. 11657–11665.
- WILLIS, D.M., GARDINER, A.R., DAVDA, V.N., UND BONE, V.J., *Planar charged-particle trajectories in multiple magnetic fields*, Ann. Geophys., 15, 1997, S. 197–210.
- WILLIS, D.M., HOLDER, A. C., UND DAIS, C. J., *Possible configurations of the magnetic field in the outer magnetosphere during geomagnetic polarity reversals*, Ann. Geophys., 18, 2000, S. 11–27.
- WOLF, R.A., *The quasi-static (slow-flow) region of the magnetosphere*, in Solar-terrestrial physics, Carovillano, R.L. und Forbes, J.M., Hrsg., D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1983, S. 303–368.
- ZIEGER, B., VOGT, J., GLASSMEIER, K.-H., UND GOMBOSI, T.I., *Magnetohydrodynamic simulation of an equatorial dipolar paleomagnetosphere*, J. Geophys. Res., , 2004. submitted.



## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Erdmagnetische Variationen“ (Nr. 1097) und wurde während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Geophysik und Meteorologie der Technischen Universität Braunschweig angefertigt.

Mein Dank gilt Prof. Dr. K.-H. Glaßmeier und Prof. Dr. Joachim Vogt, die diese Arbeit anregt und betreut haben. Sie waren stets offen für Fragen und Diskussionen.

Prof. Dr. G.-H. Voigt hat mir die Fortran-Routinen zur Berechnung seines Magnetosphärenmodells zur Verfügung gestellt. Auch stand er mir immer mit vielen hilfreichen Hinweisen und Ideen zur Seite.

Viele Anregungen habe ich auch bei den Teilnehmern des Schwerpunktprogramms gefunden, besonders bei der Zusammenarbeit mit der Gruppe „Wirkung“.

Prof. G. A. Glatzmaier und Dr. Bertalan Zieger möchte ich danken dafür, daß sie mir ihre jeweiligen Simulationsdaten und -ergebnisse zur Verfügung gestellt haben.

Dr. G. Musmann verdanke ich die Möglichkeit, einen Einblick in verschiedene Satellitenprojekte erhalten zu haben. Die Zusammenarbeit mit ihm und auch Holger Kügler und Christiane Stuntebeck haben mir stets viel Freude bereitet.

Als Mitglied der International Max Planck Research School on Physical Processes in the Solar System and Beyond hatte ich die Gelegenheit, auch andere Gebiete der Physik kennenzulernen. Stellvertretend für die gute Organisation der Max Planck Research School möchte ich Dr. Dieter Schmitt danken.

Mein Dank gilt allen Arbeitskollegen, die stets zu einer freundlichen Arbeitsatmosphäre beigetragen, immer zu erfreulichen und fachlich interessanten Gesprächen bereit waren und mir bei vielen kleineren und größeren Problemen geholfen haben. Insbesondere möchte ich mich hierbei bei Jean-Mathias Grießmeier für viele interessante Diskussionen und eine gute Zusammenarbeit bedanken. Ebenso danke ich Oliver Bäumer und Jens Stadelmann für ihre unermüdliche Hilfe beim Lösen von Computerproblemen. Prof. Dr. P. Weidelt hat mir bei komplizierteren Berechnungen stets mit Rat zur Seite gestanden.

Und natürlich möchte ich meiner Familie, meinen Freunden und ganz besonders meinem Mann für ihre Unterstützung und ihr Interesse danken.



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name Anja Stadelmann, geb. Neuhaus  
Geburtsdatum, -ort 27. September 1973, Braunschweig  
Staatsangehörigkeit deutsch  
Familienstand verheiratet

## Schule und Studium

1980 bis 1984 Grundschule (Weddel)  
1984 bis 1986 Orientierungsstufe Volkmarode (Braunschweig)  
1986 bis 1993 Gymnasium Ricarda-Huch-Schule (Braunschweig)  
Jun 1993 Abitur  
Okt 1993 bis Jul 1999 Physikstudium an der TU Braunschweig, mit Schwerpunkt Geophysik und Nebenfach Mathematik  
Feb 1997 bis Mai 1997 Praktikum/Studienaufenthalt an der Staatlichen Universität Saporizhzhja, Ukraine  
Jul 1999 Physikdiplom

## Ausgeübte Tätigkeiten

seit Okt 1998 Wissenschaftliche Hilfskraft bzw. Mitarbeiterin am Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig im Bereich der Projektarbeit mit dem Schwerpunkt der Magnetische Reinheitsuntersuchungen an Satelliten  
seit Jan 2000 Wissenschaftliche Angestellte und Doktorandin am Institut für Geophysik und Meteorologie, TU Braunschweig  
seit Aug 2000 Teilnahme am DFG Schwerpunktprogramm „Erdmagnetische Variationen“  
seit Feb 2002 Mitglied an der International Max Planck Research School on Physical Processes in the Solar System and Beyond

## Veröffentlichungen

- J.-M. Grießmeier, A. Stadelmann, T. Penz, H. Lammer, F. Selsis, I. Ribas, E. F. Guinan, U. Motschmann, H. K. Biernat, W. W. Weiss, *The effect of tidal locking on the magnetospheric and atmospheric evolution of “Hot Jupiters”*, *Astron. Astrophys.* 425, 753 - 762, 2004
- J. Vogt, B. Zieger, A. Stadelmann, K.-H. Glassmeier, T. Gombosi, K.C. Hansen, A. Ridley, *MHD simulations of quadrupolar paleomagnetospheres*, *JGR*, 109

(A12), CiteID A12221, 2004

- K.-H. Glassmeier, J. Vogt, A. Stadelmann, S. Buchert, *Concerning long-term geomagnetic variations and space climatology*, *Annales Geophysicae*, 22 (10), 3669-3677, 2004
- J. Grosser, K.-H. Glassmeier, A. Stadelmann, *Induced magnetic field effects at planet Mercury*, *Planet. Space Sci.*, 52 (14), 1251-1260, 2004
- Griebmeier, J.-M., Stadelmann, A., Motschmann, U., Belisheva, N. K., Lammer, H., Biernat, H. K., *Cosmic ray impact on extrasolar Earth-like planets in close-in habitable zones*, *Astrobiology* 5(5), 591-607 (2005)